信阳师范学院学报(自然科学版) Journal of Xinyang Teachers College
第11卷 第2期 1998年4月 (Natural Science Edition) Vol. 11 No. 2 Apr. 1998

带Maxwell边界条件的定态迁移方程的临界本征值*

张显文 黄天学

(信阳师范学院数学系 河南, 信阳 464000) (信阳教育学院数学系 河南, 信阳 464000)

摘 要 在L^1空间中证明了带Maxwell积分型边界条件的定态球介质迁移方程临界本征值的存在性, 并且给出了临界本征值的一系列分析性质。

关键词 Maxwell边界条件; 迁移方程; 临界本征值

分类号 O175.6

1 引言

描述定态迁移系统的临界参数与临界分布函数的存在性及其分析性质是迁移理论中的研究课题之一。在自由边界条件和反射边界条件下, 对这一问题已有许多研究[1,2], 但是, 对带Maxwell边界条件的临界迁移问题的研究目前还很少[3], 文献[4,5]对板模型作了一些讨论。本文研究如下的带Maxwell积分型边界条件的定态球介质迁移方程:

$$v\mu\frac{\partial}{\partial r}f(r,\mu,v)+v\frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial f}{\partial\mu}+v\sum(r,\mu,v)f(r,\mu,v)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\int_{V_m}^{V_M}\mathrm{d}v'\int_{-1}^{1}k(r,v,v')f(r,\mu',v')\mathrm{d}\mu' \tag{1}$$

其中$(r,\mu,v)\in G=[0,R]\times[-1,1]\times(V_m,V_M]$, $0<V_m<V_M<+\infty$,

$$|v\mu|f(R,\mu,v)=\int_{V_m}^{V_M}\mathrm{d}v'\int_0^1\alpha(\mu,\mu',v,v')v'\mu'f(R,\mu',v')\mathrm{d}\mu' \tag{2}$$

其中$(\mu,v)\in[-1,0)\times(V_m,V_M]$, $f(r,\mu,v)$是单粒子分布函数, $\sum(r,\mu,v)$和$k(r,v,v')$分别为迁移系统的总截面和碰撞核, $\alpha(\mu,\mu',v,v')$为边界上的散射系数。根据系统的物理意义, 我们对以上参数作如下假设:

(A) $\sum(r,\mu,v)$和$k(r,v,v')$分别为定义于G和$[0,R]\times(V_m,V_M]\times(V_m,V_M]$上的非负有界可测函数, 并且满足: $\lambda_0=\operatorname*{ess\,inf}_{(r,\mu,v)\in G}\{\sum(r,\mu,v)\}>0$, $k(r,v,v')>0$.

(B) $\alpha(\mu,\mu',v,v')$为定义于$[-1,0)\times(0,1]\times(V_m,V_M]\times(V_m,V_M]$上的非负有界可测函数, 并且满足: $\int_{V_m}^{V_M}\mathrm{d}v\int_{-1}^{0}\alpha(\mu,\mu',v,v')\mathrm{d}\mu\le 1$.

对方程(1)(2)作变换: $x=r\mu$, $y=r\sqrt{1-\mu^2}$, $v=v$, $(r,\mu,v)\in G$, 记$\varphi(x,y,v)=f(r,\mu,v)$, 则有

---

* 河南省教委自然科学基础研究资助课题。

收稿日期 1997-06-02

$$v\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y,v)+v\sum\left(\sqrt{x^2+y^2},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},v\right)\varphi(x,y,v)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\int_{m}^{V_M}\mathrm{d}v'\int_{r}\frac{1}{r}k(r,v,v')\varphi(z,\sqrt{r^2-z^2},v')\mathrm{d}z \tag{3}$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y,v)\in D=\{(x,y,v)\,|x^2+y^2\le R^2,y\ge 0,V_m<v\le V_M\}$.

$$\frac{vy}{R^2}\varphi(-\sqrt{R^2-y^2},y,v)$$
$$=\int_{m}^{V_M}\mathrm{d}v'\int^{R}\frac{y}{R\sqrt{R^2-y^2}}\alpha\left(-\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R},\frac{\sqrt{R^2-y'^2}}{R};v,v'\right)\frac{v'y'}{R^2}\varphi(\sqrt{R^2-y'^2},y',v')\mathrm{d}y' \tag{4}$$

其中 $(y,v)\in S=\{(y,v)\,|0\le y\le R,V_m<v\le V_m\}$.

本文选取具有物理意义的带权 L^1 空间作为状态空间, 即 $L^1(D,y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}v)$ 及 $L^1(S,\frac{vy}{R^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}v)$, 其中的范数和正锥分别为:

$$\|\varphi\|=\int|\varphi(x,y,v)|y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}v,\ \varphi\in L^1(D,y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}v)$$
$$\|\psi\|=\int|\psi(y,v)|\frac{vy}{R^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}v,\ \psi\in L^1(S,\frac{vy}{R^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}v)$$
$$L^1(D,y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}v)_+=\{\varphi|\varphi\in L^1(D,y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}v)\text{ 且 }\varphi(x,y,v)\ge 0,a.e\}$$
$$L^1(S,\frac{vy}{R^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}v)_+=\{\psi|\psi\in L^1(S,\frac{vy}{R^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}v)\text{ 且 }\psi(y,v)\ge 0,a.e\}$$

记 $X=L^1(D,y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}v)$, $Y=L^1(S,\frac{vy}{R^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}v)$, 其正锥分别记为 X_+ 和 Y_+。熟知 $(X,X_+,\|\cdot\|)$ 和 $(Y,Y_+,\|\cdot\|)$ 都是复 Banach 格。定义如下算子:

$$B:X\to X;\ (B\varphi)(x,y,v)=v\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\sum\left(\sqrt{x^2+y^2},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},v\right)\varphi,$$
$$D(B)=\{\varphi\in X\,|\varphi\text{ 满足 }(i)B\varphi\in X;\ (ii)\varphi(\pm\sqrt{R^2-y^2},y,v)\in Y\text{ 并且满足边界条件 }(4)\},$$
$$K:X\to X;\ (K\varphi)(x,y,v)=\frac{1}{r}\int_{m}^{V_M}\mathrm{d}v'\int_{r}k(r,v,v')\varphi(z,\sqrt{r^2-z^2},v')\mathrm{d}z,\ D(K)=X.$$

由(A)知 K 为有界线性算子并且(3)(4)等价于如下的算子方程:

$$B\varphi=\frac{1}{\lambda}K\varphi,\ \varphi\in D(B) \tag{5}$$

2 临界本征值的存在性

为表述简便, 记 $w=\sqrt{R^2-y^2}$, $w'=\sqrt{R^2-y'^2}$, 记

$$\triangle(x,y,v)=\exp\left[-\int_{w}\sum\left(\sqrt{z^2+y^2},\frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}},v\right)\mathrm{d}z\right],$$
$$M(y,y';v,v')=\frac{v'y'}{Rvw}\alpha\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)\triangle(w',y',v'),\ (y,v)\in S,\ (y',v')\in S,$$
$$H(y,v;x',y',v')=\frac{y'}{Rvw}\alpha\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)\frac{\triangle(w',y',v')}{\triangle(x',y',v')},\ (y,v)\in S,\ (x',y',v')\in D.$$

构造如下一系列线性算子:

$$M:Y\to Y;\ (M\psi)(y,v)=\int M(y,y';v,v')\varphi(y',v')\mathrm{d}y'\mathrm{d}v'$$
$$H:X\to Y;\ (H\varphi)(y,v)=\int H(y,v;x',y',v')\varphi(x',y',v')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}v'$$

$L: Y \to X$; $(L\psi)(x,y,v) = \triangle(x,y,v)\psi(y,v)$;

$P: X \to X$; $(P\varphi)(x,y,v) = \int_w \frac{1}{v}\frac{\triangle(x,y,v)}{\triangle(x',y,v)}\varphi(x',y,v)\,dx'$

引理2.1　算子M, H, L和P均是有界线性算子, 并且存在$\alpha_0 \in (0,1]$使得

$$\|M\| \le \alpha_0,\ \|H\| \le \frac{\alpha_0}{R^2},\ \|L\| \le \frac{R}{\lambda_0},\ \|P\| \le \frac{1}{\lambda_0}.$$

证明　以M为例证明之。设$\psi \in Y$, 则

$$\|M\psi\| = \int |(M\psi)(y,v)| \frac{vy}{R^2}dy\,dv = \int \left|\int M(y,y',v,v')\psi(y',v')dy'dv'\right| \frac{vy}{R^2}dy\,dv$$

$$\le \int_m^{V_M} dv \int^R \frac{vy}{R^2}dy \int_m^{V_M} dv' \int M(y,y',v,v')|\psi(y',v')|dy'$$

$$\le \int_m^{V_M} dv \int^R \frac{vy}{R^2}dy \int_m^{V_M} dv' \int \exp(-2\lambda_0 w')\frac{v'y'}{Rvw}\alpha\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)|\psi(y',v')|dy'$$

令$\alpha_0 = \operatorname*{esssup}_{(y',v')\in S} \int_m^{V_M} dv \int^R \frac{y}{Rw}\alpha\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)dy = \operatorname*{esssup}_{(y',v')\in S}\int_m^{V_M} dv \int_1^0 \alpha\left(\mu,\frac{w'}{R};v,v'\right)d\mu$, 由条件$(B)$知$\alpha_0 \in (0,1]$且由上面的推导知

$$\|M\psi\| \le \alpha_0 \int \exp(-2\lambda_0 w')|\psi(y',v')|\frac{v'y'}{R^2}dy'dv' \le \alpha_0\|\psi\|,$$

即$\|M\| \le \alpha_0$.

引理2.2　算子M是弱紧的; 并且$r(M) < 1$, 从而$1 \in \rho(M)$.

证明　关于算子M的弱紧性的证明见[6], 现在证明$r(M) < 1$, 由[7]知M的非零谱点均是M的具有有限代数重数的本征值。另一方面, 由M的定义知M为正算子。因此, 若$r(M) > 0$, 则$r(M)$必是M的本征值[8], 故存在$\psi \in Y\setminus\{0\}$, 使得$M\psi = r(M)\psi$, 从而有$\|M\psi\| = r(M)\|\psi\|$。但是, 由引理2.1的证明过程知对任何$\psi \in Y$都有$\|M\psi\| < \alpha_0\|\psi\|$。综上所述有$\psi \in Y\setminus\{0\}$使得$r(M)\|\psi\| < \alpha_0\|\psi\|$, 即有$r(M) < \alpha_0 \le 1$, 另外, 由[9]知$1 \in \rho(M)$. 证毕

引理2.3　算子B存在有界逆算子B^{-1}, 并且

$$B^{-1} = L(I-M)^{-1}H + P \tag{6}$$

证明　由引理2.2及[9]知(6)式右端是有界线性算子并且等于$L\left(\sum_{n=0}^{\infty} M^n\right)H + P$, 记其为$Q$. 首先证明值域$R(Q) \subset D(B)$, 对$\forall \varphi \in X$有

$$(Q\varphi)(x,y,v) = (L(I-M)^{-1}H\varphi)(x,y,v) + (P\varphi)(x,y,v)$$

在上式中分别令$x = -w$及$x = w$得,

$$(Q\varphi)(-w,y,v) = ((I-M)^{-1}H\varphi)(y,v) \tag{7}$$

$$(Q\varphi)(w,y,v) = \triangle(w,y,v)((I-M)^{-1}H\varphi)(y,v) + \int_w \frac{1}{v}\exp\left[-\int \sum\left(\sqrt{z^2+y^2}, \frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}}, v\right)dz\right]\varphi(x',y,v)\,dx' \tag{8}$$

由(8)经过复杂运算得

$$\int_m^{V_M} dv' \int^R \frac{y}{Rw}\alpha\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)\frac{v'y'}{R^2}(Q\varphi)(w',y',v')dy' = \frac{vy}{R^2}((I-M)^{-1}H\varphi)(y,v)$$

考虑到(7)知$Q\varphi$满足边界条件(4), 所以$Q\varphi \in D(B)$, 由$\varphi \in X$的任意性即知$R(Q) \subset D(B)$.

其次, 证明$BQ = I$, $\forall \varphi \in X$有

$$(BQ\varphi)(x,y,v) = (BL(I-M)^{-1}H\varphi)(x,y,v) + (BP\varphi)(x,y,v)$$

$$= v\frac{\partial}{\partial x}\triangle(x,y,v)\left(\left(I-M\right)^{-1}H\varphi\right)(y,v)$$

$$+ v\sum\left(\sqrt{x^2+y^2},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},v\right)\triangle(x,y,v)\left(\left(I-M\right)^{-1}H\varphi\right)(y,v)$$

$$+ v\frac{\partial}{\partial x}(P\varphi)(x,y,v) + v\sum\left(\sqrt{x^2+y^2},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},v\right)(P\varphi)(x,y,v) = \varphi(x,y,v)$$

即有 $BQ=I$.

最后证明 $QB\subset I$. 对 $\forall\varphi\in D(B)$ 经过复杂运算得

$$(PB\varphi)(x,y,v)=\varphi(x,y,v)-\triangle(x,y,v)\varphi(-w,y,v) \tag{9}$$

同理可得

$$(HB\varphi)(y,v)=\int\frac{vy'}{Rvw}\alpha\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)\varphi(w',y',v')\mathrm{d}y'\mathrm{d}v'$$
$$-\int M(y,y';v,v')\varphi(-w',y',v')\mathrm{d}y'\mathrm{d}v' \tag{10}$$

记 $\psi(y,v)=\varphi(-w,y,v)$, 因 φ 满足边界条件(4), 由(10)得 $(HB\varphi)(y,v)=((I-M)\psi)(y,v)$. 所以,

$$(L(I-M)^{-1}HB\varphi)(x,y,v)=\triangle(x,y,v)\psi(y,v) \tag{11}$$

由(9)(11)得 $(QB\varphi)(x,y,v)=\varphi(x,y,v)$, $\forall\varphi\in D(B)$, 即 $QB\subset I$. 综上所述我们知 B^{-1} 存在、有界并且(6)式成立. 证毕.

引理2 4 算子 $(KB^{-1})^5$ 为紧算子.

证明 证法同文献[10].

引理2 5 KB^{-1} 为 X 上的非支柱算子(nonsupporting operator).

证明 由定义知 M,H,L 和 P 均为正算子, 考虑到引理2 3及文献[8]知 B^{-1} 为正算子, 从而 KB^{-1} 为正算子。为证 KB^{-1} 为非支柱算子, 只需证明对任何 $\varphi\in X_+$, $\varphi\neq0$ 及任何自然数 n 都有[8]

$$(KB^{-1})^n\varphi(x,y,v)>0,\ (x,y,v)\in D,\ a.e \tag{12}$$

反设存在某个 $\varphi_0\in X_+$ 及自然数 n 使得(12)不成立, 即存在 $E\subset D$, $\mathrm{mes}E>0$ 使得 $(KB^{-1})^n\varphi_0(x,y,v)=0$, $\forall(x,y,v)\in E$. 由条件(A)知: 只要 $\varphi\in X_+\setminus\{0\}$ 就有 $(K\varphi)(x,y,v)>0$ 对几乎所有 $(x,y,v)\in D$ 成立。但是 K 和 B^{-1} 均为正算子并且 $(KB^{-1})^n=K[B^{-1}(KB^{-1})^{n-1}]$, 由上面的讨论知必有 $B^{-1}(KB^{-1})^{n-1}\varphi_0=0$, 即有 $(KB^{-1})^{n-1}\varphi_0=0$, 依此类推可得 $\varphi_0=0$, 矛盾.

由引理2 3知 B^{-1} 存在且有界, 因此临界本征值问题(5)就等价于如下的本征值问题:

$$B^{-1}K\varphi=\lambda\varphi,\ \lambda\neq0 \tag{13}$$

由[9]知(13)又等价于如下的本征值问题:

$$KB^{-1}\varphi=\lambda\varphi,\ \lambda\neq0 \tag{14}$$

因此, 对临界本征值问题(5)的讨论最终归结为对本征值问题(14)的讨论。我们称实数 λ^* 为(5)的临界本征值是指[1,2,4]: (i) $\lambda^*\neq0$ 为(14)的按模最大的实本征值; (ii) λ^* 为(14)的简单本征值, 其本征子空间由一个几乎处处正的本征函数张成; (iii) (14)的其它本征值均不存在非负本征函数.

由引理2 4, 引理2 5和[8]得,

定理2 1 算子 KB^{-1} 的谱半径 $r(KB^{-1})>0$, 并且 $\lambda^*=r(KB^{-1})$ 就是(5)的临界本征值.

3　临界本征值的分析性质

设函数组序列 $\{\sum_n(r,\mu,v), k_n(r,v,v'), \alpha_n(\mu,\mu';v,v')\}(n=1,2,3,\cdots)$ 中的每一组均满足条件(A)与(B), 前述的相应于第 n 个函数组 $\{\sum_n(r,\mu,v), k_n(r,v,v'), \alpha_n(\mu,\mu';v,v')\}$ 所确定的临界迁移系统的一系列算子分别记为 B_n, K_n, M_n, H_n, L_n 和 P_n.

由定理2.1知: 对每个自然数 n, 定态迁移系统

$$B_n\varphi = \frac{1}{\lambda}K_n\varphi, \lambda\neq 0 \tag{15}$$

必存在临界本征值, 记为 λ_n^*, 且 $\lambda_n^* = r(K_nB_n^{-1})$.

定理3.1　设

(i) $\sum_1(r,\mu,v) \geq \sum_2(r,\mu,v), (r,\mu,v)\in G$;

(ii) $k_1(r,v,v') \leq k_2(r,v,v'), (r,v,v')\in[0,R]\times(V_m,V_M]^2$;

(iii) $\alpha_1(\mu,\mu';v,v') \leq \alpha_2(\mu,\mu';v,v'), (\mu,\mu';v,v')\in[-1,0)\times(0,1]\times(V_m,V_M]^2$,

则 $\lambda_1^*\leq\lambda_2^*$。若假设以上三条中不等式至少有一个使等号不能几乎处处成立, 则有 $\lambda_1^*<\lambda_2^*$.

证明　若条件(i), (ii)和(iii)成立, 则由算子 M_n, H_n, L_n, P_n 和 K_n 的定义知 $M_1\leq M_2$; $H_1\leq H_2$; $L_1\leq L_2$; $P_1\leq P_2$, $K_1\leq K_2$. 再由(6)得 $B_1^{-1}\leq B_2^{-1}$, 从而有 $K_1B_1^{-1}\leq K_2B_2^{-1}$. 利用正算子的比较定理得[8]

$$\lambda_1^* = r(K_1B_1^{-1})\leq r(K_2B_2^{-1}) = \lambda_2^*.$$

如果假设条件中的三个不等式中至少有一个使等号不能几乎处处成立, 不妨设 $\alpha_1(\mu,\mu';v,v')$ 和 $\alpha_2(\mu,\mu';v,v')$ 不几乎处处相等, 则当 $\varphi(r,\mu,v)\equiv 1$ 时必有 $H_1\varphi\neq H_2\varphi$. 否则, 若 $H_1\varphi = H_2\varphi$, 则有

$$\int\frac{y'}{Rvw}\alpha_1\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)\exp\left[-\int'\sum_1\left(\sqrt{z^2+y^2},\frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}},v\right)dz\right]dx'dy'dv'$$
$$=\int\frac{y'}{Rvw}\alpha_2\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)\exp\left[-\int'\sum_2\left(\sqrt{z^2+y^2},\frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}},v\right)dz\right]dx'dy'dv'$$

考虑到(i)和(iii), 我们有

$$\int\frac{y'}{Rvw}\alpha_1\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)\exp\left[-\int'\sum_2\left(\sqrt{z^2+y^2},\frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}},v\right)dz\right]dx'dy'dv'$$
$$=\int\frac{y'}{Rvw}\alpha_2\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)\exp\left[-\int'\sum_2\left(\sqrt{z^2+y^2},\frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}},v\right)dz\right]dx'dy'dv'$$

由于右端被积函数不小于左端的被积函数, 所以 $\alpha_1\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)=\alpha_2\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)$ 即 $\alpha_1(\mu,\mu';v,v')=\alpha_2(\mu,\mu';v,v')$, 这与假设矛盾。因此 $H_1\varphi\neq H_2\varphi$, 考虑到 $H_1\varphi\leq H_2\varphi$ 就有 $H_1\varphi< H_2\varphi$. 由此利用(6)式及类似方法, 可以证明 $K_1B_1^{-1}\varphi< K_2B_2^{-1}\varphi$. 又由引理2.5知 $K_iB_i^{-1}(i=1,2)$ 为非支柱算子, 应用文献[8]中的比较定理得 $r(K_1B_1^{-1})< r(K_2B_2^{-1})$, 即 $\lambda_1^*<\lambda_2^*$. 证毕.

定理3.2　设

(i) $\sum_n(r,\mu,v)\xrightarrow{L^\infty(G)}\sum(r,\mu,v), (n\to\infty)$;

(ii) $k_n(r,v,v')\xrightarrow{L^\infty([0,R]\times(V_m,V_M]^2)}k(r,v,v'), (n\to\infty)$;

(iii) $\alpha_n(\mu,\mu';v,v')\xrightarrow{L^\infty([-1,0)\times(0,1]\times(V_m,V_M]^2)}\alpha(\mu,\mu';v,v')$.

则有 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n^* = \lambda^*$.

证明 先证明在定理的条件下有:

$$\lim_{n\to\infty}\|K_n - K\| = 0, \lim_{n\to\infty}\|M_n - M\| = 0, \lim_{n\to\infty}\|H_n - H\| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n - L\| = 0, \lim_{n\to\infty}\|P_n - P\| = 0$$

以 $\lim_{n\to\infty}\|M_n - M\| = 0$为例证之, 其余类似证明. 对$\forall \psi\in Y$,

$$\|M_n\psi - M\psi\| = \int\left|\int(M_n(y,y',v,v') - M(y,y',v,v))\psi(y',v')\mathrm{d}y'\mathrm{d}v'\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}v$$

$$\leq \operatorname*{ess\,sup}_{(y',v')\in S}\left(\int|M_n(y,y',v,v') - M(y,y',v,v')|\mathrm{d}y\mathrm{d}v\right)\|\psi\|$$

所以

$$\|M_n - M\| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{(y',v')\in S}\left(\int|M_n(y,y',v,v') - M(y,y',v,v')|\mathrm{d}y\mathrm{d}v\right) \tag{16}$$

但是

$$\int|M_n(y,y',v,v') - M(y,y',v,v')|\mathrm{d}y\mathrm{d}v$$

$$\leq \int\frac{vy'}{Rvw}\left|\alpha_n\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right) - \alpha\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}v$$

$$+ \int\frac{vy'}{Rvw}\alpha\left(-\frac{w}{R},\frac{w'}{R};v,v'\right)\left|\triangle_n(w',y',v') - \triangle(w',y',v')\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}v$$

由定理的条件(i)和(iii)知:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(y',v')\in S}\left(\int|M_n(y,y',v,v') - M(y,y',v,v')|\mathrm{d}y\mathrm{d}v\right) \to 0\,(n\to\infty) \tag{17}$$

由(16) (17)得 $\lim_{n\to\infty}\|M_n - M\| = 0$.

利用以上结果和引理2 1, 引理2 3知

$$\lim_{n\to\infty}\|K_nB_n^{-1} - KB^{-1}\| = 0 \tag{18}$$

由此可得

$$(K_nB_n^{-1})^5 = (KB^{-1})^5 + T_n \tag{19}$$

其中 $\lim_{n\to\infty}T_n = 0$. 由引理2 4及文献[11]知$\{K_nB_n^{-1}\}$是5阶拟总体列紧算子序列. 又由定理2 1, (18)式及文献[11]中的逼近定理知: 当 n 充分大时, $K_nB_n^{-1}$ 必有本征值 $\lambda_n'(n = 1, 2, \cdots)$, 使得 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n' = \lambda^* = r(KB^{-1})$. 但是 $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n'|\lambda_n^* = r(K_nB_n^{-1}) \geq |\lambda_n'|(n = 1, 2, \cdots)$, 所以

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\lambda_n^* \geq \underline{\lim_{n\to\infty}}|\lambda_n'| = \lim_{n\to\infty}|\lambda_n'| = \lim_{n\to\infty}\lambda_n' = \lambda^* \tag{20}$$

另一方面, 由(18)不难证明对任何自然数k 均有 $\lim_{n\to\infty}\|(K_nB_n^{-1})^k\| = \|(KB^{-1})^k\|$, 所以 $\lim_{n\to\infty}\|(K_nB_n^{-1})^k\|^{1/k} = \|(KB^{-1})^k\|^{1/k}, k = 1, 2\cdots$, 令 $k\to\infty$得[9]

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|(K_nB_n^{-1})^k\|^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\|(KB^{-1})^k\|^{1/k} = \lambda^* \tag{21}$$

但是对任何自然数k 有[9]: $\|(K_nB_n^{-1})^k\|^{1/k} \geq r(K_nB_n^{-1})$, 从而有

$$\lim_{n\to\infty}\|(K_nB_n^{-1})^k\|^{1/k} \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,r(K_nB_n^{-1}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\lambda_n^*\ (k = 1, 2, \cdots),$$

结合(21)式得:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\lambda_n^* \leq \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|(K_nB_n^{-1})^k\|^{1/k} = \lambda^* \tag{22}$$

由(20)、(22)得 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n^* = \lambda^*$.

参　考　文　献

1 阳名珠, 朱广田. 三维迁移方程的临界参数与临界通量. 数学物理学报, 1981, 1: 1～12

2 G Borgioli and G Frosali. *Criticality Transport Problem for Spherical Systems with Specular Type Boundary Conditions*. Trans Theo Statis Phys, 1986, 15: 937～958

3 黄祖洽, 丁鄂江. 输运理论. 科学出版社, 北京, 1987

4 G Busoni and G Frosali. *Integral Fomulation for a Steady-State Transport Process with General Boundary Conditions*. Math Meth in the Appl Sci, 1984, 6: 68～83

5 张显文, 梁本中等. 迁移理论中的一类本征值问题. 信阳师范学院学报, 1994, 7: 339～346

6 Zhang Xianwen. *Spectral Properties of a Streaming Operator with Diffuse Reflection Boundary Condition*. submitted

7 N Dunford and J T Schwartz. *Linear Operators*, Part I, Interscience, New York, 1958

8 I Marek. *Frobenius Theory of Positive Operators: Comparison Theorems and Applications*. SIAM J Appl Math, 1970, 19: 607～628

9 A E Taylor and Lay D C. *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley Sons, 2nd Edition, New York, 1980

10 Zhang Xianwen and Liang Benzhong. *On the Transport Equation with Integral Boundary Conditions and its Conservative Law*. Appl Math-JCU, 1996, 11B: 33～42

11 Yang Minzhu and Zhu Guangtian. *Approximation Theory for a Certain Class of Operators and Their Applications to Transport Theory*. Progr. Nucl. Energy, 1981, 8: 269～282

Critical Eigenvalue for the Steady-State Transport Equation with Maxwell Boundary Condition

Zhang Xianwen

(Dept of Math, Xinyang Teachers College. Xinyang, Henan; China 464000)

Huang Tianxue

(Dept of Math, Xinyang Educational College. Xinyang, Henan; China 464000)

Abstract　The existence of the critical eigenvalue for the steady-state spherical transport equation with Maxwell boundary condition of integral type is proved in L^1 space, furthermore, a series of analytical properties of the critical eigenvalue are given.

Key words　Maxwell boundary condition; Transport equation; Critical eigenvalue

责任编辑　郭红建