信阳师范学院学报(自然科学版)
JOURNAL OF XINYANG NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition)

***F-CC*调和映射的若干结果**

冯书香, 蒋凯歌, 李静

DOI:10.3969/j.issn.1003-0972.2020.01.006　　文章编号:1003-0972(2020)01-0031-06

F-CC 调和映射的若干结果

冯书香[1],蒋凯歌[2*],李　静[3]

(1.信阳师范学院 数学与统计学院,河南 信阳 464000; 2.中山大学 数学学院,广东 广州 510275;
3.南京理工大学 理学院,江苏 南京 210094)

摘　要:引入从黎曼流形到伪 Hermitian 流形间的 *F-CC* 调和映射的水平能量泛函. 利用 *F*-水平应力-能量张量的增长条件和该映射在无穷远点处的渐近条件得到一些刘维尔型结果.

关键词:*F-CC* 调和映射; 刘维尔型定理; *F*-水平应力-能量张量

中图分类号:O186.1　　**文献标志码**:A　　**开放科学(资源服务)标识码(OSID)**:

Some Results for *F-CC*-harmonic Maps

FENG Shuxiang[1], JIANG Kaige[2*], LI Jing[3]

(1.College of Mathematics and Statistics, Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China;
2.School of Mathematics, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China;
3.School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: A horizontal energy functional for *F-CC*-harmonic maps is introduced from a Riemannian manifold to a pseudo-Hermitian manifold. Some Liouville type results are obtained for these maps under suitable growth conditions of the *F*-horizontal stress-energy and an asymptotic condition at the infinity for the maps.

Key words: *F-CC* harmonic map; Liouville type theorem; *F*-horizontal stress-energy tensor

0　引言

近几年来,伪-Hermitian 几何学已经受到了广泛关注[1-5].调和映射是能量泛函

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_M |\mathrm{d}u|^2 \mathrm{d}v_g$$

映射的临界点,是黎曼测地线的推广.最近,种田等[6]研究了从黎曼流形到伪 Hermitian 流形之间的一个映射 $u:(M,g)\to(N,H(N),J,\theta)$,并关于这个映射引入了一个水平能量泛函

$$E_H(u) = \frac{1}{2}\int_M |\mathrm{d}u_H|^2 \mathrm{d}v_g,$$

如果对于任意的水平变分向量场,它都是 $E_H(u)$ 的一个临界点,那么这个映射称为 *CC*-调和映射.与调和映射类似,水平应力-能量张量是证明 *CC*-调和映射能量守恒的重要工具.种田等[7]引入了与水平能量 $E_H(u)$ 有关的水平应力-能量张量,得到了从黎曼流形到伪 Hermitian 流形的任意水平 *CC*-调和映射都满足守恒律,得到了从黎曼流形到 Sasakian流形的任意 *CC*-调和映射也满足这个守恒律,然后利用水平应力-能力张量,得到了一些能量单调公式和关于 $E_H(u)$ 的 *CC*-调和映射的刘维尔型结果.

设 $f:(M,g)\to(N,H(N),J,\theta)$ 是从黎曼流形到伪-Hermitian 流形的光滑映射,对 M 中任意具有光滑边界的有界区域 D,引进 *F-CC* 调和映射的水平能量泛函 $e_{H,D}^F(f)$ 如下:

$$e_{H,D}^F(f) = \int_D F\left(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2}\right)\mathrm{d}v_g,$$

其中 $F:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是一个 C^2 函数且 $F(0)=0$,在$[0,\infty)$上 $F'(t)>0$, $\mathrm{d}f_H=\pi_H\circ \mathrm{d}f$.

如果 f 是 *F*-水平能量泛函 $e_{H,D}^F(f)$ 关于任意的水平变分向量场 $V\in\Gamma(f^{-1}H(N))$ 的临界点(V 的支集落在 D 中),那么称 f 是 *F-CC* 调和映射.本文利用 *F*-水平应力-能量张量得到单调不等式,利用单调不等式和比较定理等方法得到一些刘维尔型结果.

1　预备知识

设 N 是一个实$(2n+1)$维光滑可微流形.$TN\otimes C$ 是 N 上的复化切丛.$T_{1,0}N\subseteq TN\otimes C$ 是秩为 n 的复子丛.若 $T_{1,0}N\cap T_{0,1}N=0$ 且$[T_{1,0}N,T_{1,0}N]\subseteq T_{1,0}N$,则 $T_{1,0}N$ 被称为 N 上的一个 *CR* 结构,其中 $T_{0,1}N=\overline{T_{1,0}N}$.

收稿日期:2019-03-05;**修订日期**:2019-08-31; *.**通信联系人**,E-mail: kaigejiang@ 163.com
基金项目:国家自然科学基金项目(11201400);河南省高校骨干教师培养计划项目(2016GGJS-096)
作者简介:冯书香(1978—),女,山东菏泽人,讲师,硕士,主要从事积分几何和凸几何的研究.

对于任意的 $X,Y\in\Gamma(H(N))$,通过构建

$$g_\theta(X,Y)=\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta(X,T_bY)$$

来定义双线性形式 G_θ.因为 L_θ 和 G_θ 在 $H(N)\otimes H(N)$ 上是一致的(C 线性扩展为$H(N)\otimes C$),所以对于任意的 $X,Y\in\Gamma(H(N))$,都有

$$G_\theta(J_bX,J_bY)=G_\theta(X,Y).$$

定义 1　设$(N,T_{1,0}N)$是一个可定向的 CR 流形且 θ 是 N 上的一个固定的伪 Hermitian 结构.如果它的 Levi 形式 L_θ 是正定的,那么$(N,T_{1,0}N)$是一个严格伪凸的 CR 流形.

注　本文只考虑严格伪凸的 CR 流形.如果$(N,T_{1,0}N)$是一个严格伪凸的 CR 流形并且 θ 是使得 L_θ 正定的伪 Hermitian结构,那么$(N,H(N),J_b,\theta)$称为伪 Hermitian 流形.

如果$(N,H(N),J_b,\theta)$是一个伪 Hermitian 结构,那么在 N 上存在一个特殊的定义全局的非零切向量场 T,横截于 $H(N)$,且满足 $\theta(T)=1,T_d\theta=0$.

向量 $\boldsymbol{T}$ 也同样适用于作为特征方向.因此有以下分解:$\boldsymbol{T}N=H(N)\oplus R\boldsymbol{T}$.运用这个分解,可以把 G_θ 延伸到 N 上的一个黎曼度量 G_θ.对于任意的 $X,Y\in\Gamma(\boldsymbol{T}N)$,可以由

$$g_\theta(X,Y)=G_\theta(\pi_HX,\pi_HY)+\theta(X)\theta(Y)$$

给出 g_θ 作为黎曼度量,其中 $\pi_H:\boldsymbol{T}N\to H(N)$是与直和分解有关的投影.$G_\theta$ 被称为 Webster 度量.

在伪 Hermitian 流形上,存在一个保持了复合结构和 Webster 度量的标准的线性联络.

定理 1[8]　设$(N,H(N),J,\theta)$是一个伪 Hermitian 流形.设 T 为特征方向且 J 是 $H(N)$上的复合结构(推广到 $\boldsymbol{T}N$ 上的自同态需要 $JT=0$).设 g_θ 是 Webster 度量,则在 N 上有一个特殊的线性联络(称为 Tanaka-Webster 联络)只要满足

(i) Levi 分布 $H(N)$关于∇是平行的;

(ii) $\nabla J=0,\nabla g_\theta=0$;

(iii) ∇的挠率 T_∇ 满足以下条件:对于任意的 $Z,W\in T_{1,0}N$,$T_\nabla(Z,W)=0$,

$$T_\nabla(Z,\bar{W})=2\sqrt{-1}L_\theta(Z,\bar{W})T$$

和 $\tau J+J\tau=0$.

τ 表示伪 Hermitian 挠率,由 $\tau(X)=T_\nabla(T,X)$定义的取值于$H(N)$的 1-形式,记为$\tau(T_{1,0}N)\subseteq T_{1,0}N$ 并且 τ 是 g_θ 对称的.

注　由定理 1 可以得到$\nabla T=0$ 且$\nabla\theta=0$,伪 Hermitian 挠率 τ 关于 g_θ 和 trace $\tau=0$ 是自共轭的,构造

$A(X,Y)=g_\theta(\tau X,Y)$,则 $A(X,Y)=A(Y,X)$[8].

特别地,如果伪 Hermitian 挠率 τ 为零,那么$(N,H(N),J,\theta)$称为 Sasakian 流形.

引理 1[9]　设$f:(M,g)\to(N,H(N),J,\theta)$是从黎曼流形到伪-Hermitian 流形的光滑映射,对于任意的 $X,Y\in\Gamma(\boldsymbol{TM})$,有

$$\begin{aligned}\nabla_X\mathrm{d}f(Y)-\nabla_Y\mathrm{d}f(X)=\\ \mathrm{d}f([X,Y])+\theta(\mathrm{d}f(X))\tau(\mathrm{d}f(Y))-\\ \theta(\mathrm{d}f(Y))\tau(\mathrm{d}f(X))+\\ d\theta(\mathrm{d}f(X),\mathrm{d}f(Y))\boldsymbol{T}.\end{aligned}$$

2　第一变分公式

设∇^M和∇分别为(M,g)和$(N,H(N),J,\theta)$上的 Levi-Civita 联络和 Tanaka-Webster 联络.β 是关于(∇^M,∇)的第二基本形式.

定理 2　设$f:(M,g)\to(N,H(N),J,\theta)$是从黎曼流形到伪-Hermitian 流形的光滑映射,对 M 中任意具有光滑边界的有界区域 D,设 $V\in\Gamma(f^{-1}H(N))$是 M 中的水平变分向量场并且支集落在 D 中,$\{f_t\}_{|t|<\varepsilon}$是 f 的光滑单参数变分满足 $f_0=f$ 及$V=\left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0}$,则

$$\frac{\mathrm{d}e^F_{H,D}(f_t)}{\mathrm{d}t}=-\int_D\langle V,\tau^F_H(f)\rangle\mathrm{d}v_g,$$

其中

$$\tau^F_H(f)=\mathrm{d}f_H(\mathrm{grad}(F'(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})))+F'(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})\mathrm{tr}_g(\beta_H+f^*\theta\otimes f^*\tau),$$

$\beta_H=\pi_H\circ\beta$,称 $\tau^F_H(f)$为 f 的 F-CC 张力场.

证明　给出任意一个单参数变量$\{f_t\}(|t|<\varepsilon)$,$f_0=f$ 且 $V=\left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0}$,设 $\Phi(\cdot,t)=f_t$,$\{e_i\}^m_{i=1}$是 $\boldsymbol{TM}$ 上的一个局部正交标架场,则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e^F_{H,D}(f_t)}{\mathrm{d}t}&=\sum_{i=1}^mF'(\frac{|\mathrm{d}\Phi_H|^2}{2})\cdot\int_M\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(\pi_H\mathrm{d}\Phi_H(e_i)),\pi_H\mathrm{d}\Phi_H(e_i)\rangle\mathrm{d}v_g=\\&\sum_{i=1}^m\Big(-\int_Me_i(F'(\frac{|\mathrm{d}\Phi_H|^2}{2}))\langle\mathrm{d}\Phi(\frac{\partial}{\partial t}),\mathrm{d}\Phi_H(e_i)\rangle\mathrm{d}v_g-\\&F'(\frac{|\mathrm{d}\Phi_H|^2}{2})\int_M\langle\mathrm{d}\Phi(\frac{\partial}{\partial t}),\nabla_{e_i}\mathrm{d}\Phi_H(e_i)\rangle\mathrm{d}v_g-\\&F'(\frac{|\mathrm{d}\Phi_H|^2}{2})\int_M\langle\theta(\mathrm{d}\Phi(e_i))\mathrm{d}\Phi(\frac{\partial}{\partial t}),\tau(\mathrm{d}\Phi(e_i))\rangle\mathrm{d}v_g\Big).\end{aligned}$$

由 $V=\left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0}$ 和 Stokes 公式可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}e^F_{H,D}(f_t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-\int_D\langle V,\mathrm{d}f_H(\mathrm{grad}(F'(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})))+F'(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})\mathrm{tr}_g(\beta_H+f^*\theta\otimes f^*\tau)\rangle\mathrm{d}v_g.$$

注:如果目标流形 N 是 Sasakian 的,则上式可简化为

$$\left.\frac{\mathrm{d}e^F_{H,D}(f_t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-\int_D\langle V,\mathrm{d}f_H(\mathrm{grad}(F'(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})))+$$

$$F'(\frac{|df_H|^2}{2})\mathrm{tr}_g\beta_H\rangle dv_g.$$

证毕.

3 *F*-水平应力-能量张量

依据 Baird-Eells[10],设 $f:(M,g)\to(N,H(N),J,\theta)$ 是从黎曼流形到伪-Hermitian 流形的光滑映射,f 的 F-水平应力-能量张量 $S_{f,H}^F$是 M 上的对称 2-张量:

$$S_{f,H}^F = F(\frac{|df_H|^2}{2})g - F'(\frac{|df_H|^2}{2})(f^*g_\theta)_H,$$

其中

$$(f^*g_\theta)_H(\cdot,\cdot)=\langle\pi_H df(\cdot),\pi_H df(\cdot)\rangle.$$

对于任意的 2 阶张量场 $T\in\Gamma(T^*M\otimes T^*M)$,$T$ 的散度定义为

$$(\mathrm{div}\ T)(X) = \sum_i(\nabla_{e_i}^M T)(e_i,X),$$

其中$\{e_i\}$是 M 的一个局部正交基.

定理 3 对于任意的 $X\in\Gamma(\boldsymbol{TM})$,有

$$(\mathrm{div}\ S_{f,H}^F)(X)=-\langle\tau_H^F(f),df_H(f)\rangle+ F'(\frac{|df_H|^2}{2})(\mathrm{tr}_g f^*A)(f^*\theta)(X).$$

证明 由散度的定义和引理 1 可得,

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}\ S_{f,H}^F)(X)=&\sum_i(\nabla_{e_i}S_{f,H}^F)(e_i,X)=\\ &F'(\frac{|df_H|^2}{2})\langle\theta(df(X))\tau(df(e_i)),df_H(e_i)\rangle-\\ &F'(\frac{|df_H|^2}{2})\langle\theta(df(e_i))\tau(df(X)),df_H(e_i)\rangle-\\ &\langle df_H(\mathrm{grad}(F'(\frac{|df_H|^2}{2}))),df_H(X)\rangle-\\ &F'(\frac{|df_H|^2}{2})\langle\nabla_{e_i}df(e_i),df_H(X)\rangle=\\ &-\langle\tau_H^F(f),df_H(f)\rangle+\\ &F'(\frac{|df_H|^2}{2})(\mathrm{tr}_g f^*A)(f^*\theta)(X).\end{aligned}$$

证毕.

定义 2 若 $\mathrm{div}\ S_{f,H}^F=0$,则称 f 满足守恒律.

推论 1 假设 $f:(M,g)\to(N,H(N),J,\theta)$ 是从黎曼流形到 Sasakian 流形的 F-CC 调和映射,则 f 满足守恒律,即 $\mathrm{div}\ S_{f,H}^F=0$.

对于两个 2 阶张量 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2\in\Gamma(T^*M\otimes T^*M)$,它们的内积定义如下:

$$\langle\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2\rangle = \sum_{i,j=1}^m\boldsymbol{T}_1(e_i,e_j)\boldsymbol{T}_2(e_i,e_j), \tag{1}$$

其中$\{e_i\}$是关于 g 的一个正交基.对于一个向量场 $X\in\Gamma(\boldsymbol{TM})$,用 θ_X 表示它的对偶 1-形式,

$$\theta_X(Y)=g(X,Y),$$

其中 $Y\in\Gamma(TM)$.θ_X 的协变导数给出了一个 2 阶张量场 $\nabla^M\theta_X$:

$$(\nabla^M\theta_X)(Y,Z)=(\nabla_Y^M\theta_X)(Z)=g(\nabla_Y^M X,Z). \tag{2}$$

如果 $X=\nabla\varphi$ 是 M 上的一些 C^2 函数 φ 的梯度场,那么 $\theta_X=d\varphi$ 并且$\nabla\theta_X=\mathrm{Hess}\ \varphi$.

引理 2[11] 设 T 是一个对称的(0,2)-型张量场,并且设 X 是一个向量场,则

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(i_XT)=&(\mathrm{div}\ T)(X)+\langle T,\nabla^M\theta_X\rangle=\\ &(\mathrm{div}\ T)(X)+\frac{1}{2}\langle T,L_Xg\rangle,\end{aligned} \tag{3}$$

其中 L_X 是沿方向 X 的度量 g 的李导数.

设 D 是有 C^1 边界的 M 的任意有限域.利用 Stokes 定理,立即可以得到下面的积分公式:

$$\int_{\partial D}T(X,\nu)ds_g = \int_D(\langle T,\frac{1}{2}L_Xg\rangle + \mathrm{div}(T)(X))dv_g, \tag{4}$$

其中 ν 是沿∂D 的单位外法线向量场.

把 $T=S_{f,H}^F$代入式(4)中,则有

$$\int_{\partial D}S_{f,H}^F(X,\nu)ds_g = \int_D[\langle S_{f,H}^F,\frac{1}{2}L_Xg\rangle + (\mathrm{div}S_{f,H}^F)(X)]dv_g.$$

4 单调公式及刘维尔型定理

设(M,g)是具有极点 x_0 的完备黎曼流形,且 M 是连通的.运用水平应力-能量张量得到 F-水平能量的单调公式,然后利用此单调公式得到 F-CC 调和映射的刘维尔型定理.参阅文献[12]和[13],F 的上界 d_F 和下界 l_F 定义如下:

$$d_F=\sup_{t\geqslant0}\frac{tF'(t)}{F(t)},\ l_F=\inf_{t\geqslant0}\frac{tF'(t)}{F(t)}.$$

引理 3[14,15] 设(M^m,g)是具有一个极点 x_0 的完备黎曼流形,K_r 表示 M 的径向曲率.

(i)如果$-\alpha^2\leqslant K_r\leqslant-\beta^2$,$\alpha\geqslant\beta>0$,那么

$$\beta\coth(\beta r)(g-dr\otimes dr)\leqslant\mathrm{Hess}(r)\leqslant \alpha\coth(\alpha r)(g-dr\otimes dr),$$

(ii)如果$-\frac{A}{(1+r^2)^{1+\varepsilon}}\leqslant K_r\leqslant\frac{B}{(1+r^2)^{1+\varepsilon}}$,$\varepsilon>0$,$A\geqslant0$和 $0\leqslant B<2\varepsilon$,那么

$$\frac{1-B/2\varepsilon}{r}(g-dr\otimes dr)\leqslant\mathrm{Hess}(r)\leqslant \frac{e^{A/2\varepsilon}}{r}(g-dr\otimes dr),$$

(iii)如果$-\frac{a^2}{c^2+r^2}\leqslant K_r\leqslant\frac{b^2}{c^2+r^2}$,$a\geqslant0$,$b^2\in[0,\frac{1}{4}]$,那么

$$\frac{1+\sqrt{1-4b^2}}{2r}(g-dr\otimes dr)\leqslant\mathrm{Hess}(r)\leqslant \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2r}(g-dr\otimes dr).$$

引理 4[16]设(M^m,g)是具有一个极点 x_0 的完备黎曼

流形,K_r 表示 M 的径向曲率.

(i)如果$-\alpha^2\leqslant K_r\leqslant-\beta^2,\alpha\geqslant\beta>0$ 和$(m-1)\beta-2\alpha\geqslant0$,那么

$$(m-1)\lambda_{\min}+2-2d_F\max\{2,\lambda_{\max}\}\geqslant2(m-\frac{2d_F\alpha}{\beta});$$

(ii)如果$-\frac{A}{(1+r^2)^{1+\varepsilon}}\leqslant K_r\leqslant\frac{B}{(1+r^2)^{1+\varepsilon}},\varepsilon>0,A\geqslant0$和 $0\leqslant B<2\varepsilon$,那么

$$(m-1)\lambda_{\min}+2-2d_F\max\{2,\lambda_{\max}\}\geqslant 2\left(1+(m-1)(1-\frac{B}{2\varepsilon})-2d_F\mathrm{e}^{\frac{A}{2\varepsilon}}\right);$$

(iii)如果$-\frac{a^2}{c^2+r^2}\leqslant K_r\leqslant\frac{b^2}{c^2+r^2},a\geqslant0,b^2\in[0,\frac{1}{4}]$,那么

$$(m-1)\lambda_{\min}+2-2d_F\max\{2,\lambda_{\max}\}\geqslant 2\left(1+(m-1)\frac{1+\sqrt{1-4b^2}}{2}-d_F\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}\right).$$

利用引理 3 和引理 4 可以证明以下引理.

引理 5　设 M 是具有一个极点 x_0 的完备黎曼流形,

(i)如果 M 的径向曲率 K_r 满足$-\alpha^2\leqslant K_r\leqslant-\beta^2,\alpha\geqslant\beta>0$ 和$(m-1)\beta-2\alpha\geqslant0$,那么

$$\langle S_{f,H}^F,\mathrm{Hess}(r^2)\rangle\geqslant(m-\frac{2d_F\alpha}{\beta})F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2}).$$

(ii)如果 M 的径向曲率 K_r 满足

$$-\frac{A}{(1+r^2)^{1+\varepsilon}}\leqslant K_r\leqslant\frac{B}{(1+r^2)^{1+\varepsilon}},$$

$\varepsilon>0,A\geqslant0,0\leqslant B<2\varepsilon$ 和

$$1+(m-1)(1-\frac{B}{2\varepsilon})-2d_F\mathrm{e}^{\frac{A}{2\varepsilon}}>0,$$

那么

$$\langle S_{f,H}^F,\mathrm{Hess}(r^2)\rangle\geqslant(1+(m-1)(1-\frac{B}{2\varepsilon})-2d_F\mathrm{e}^{\frac{A}{2\varepsilon}})F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2}).$$

(iii)如果 M 的径向曲率 K_r 满足

$$-\frac{a^2}{c^2+r^2}\leqslant K_r\leqslant\frac{b^2}{c^2+r^2},a\geqslant0,b^2\in[0,\frac{1}{4}],$$

$$(m-1)\frac{1+\sqrt{1-4b^2}}{2}-d_F\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}>0,$$

那么

$$\langle S_{f,H}^F,\mathrm{Hess}(r^2)\rangle\geqslant(1+(m-1)\frac{1+\sqrt{1-4b^2}}{2}-2d_F\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2})F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2}).$$

定理 4　设$f:(M,g)\to(N,H(N),J,\theta)$是从黎曼流形到 Sasakian 流形的 F-CC 调和映射,如果存在一个正整数 Λ 使得

$$\langle S_{f,H}^F,\mathrm{Hess}(r^2)\rangle\geqslant2\Lambda F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2}),\tag{5}$$

那么对于任意的 $0<\rho_1\leqslant\rho_2$ 有

$$\frac{1}{\rho_1^\Lambda}\int_{B(\rho_1)}F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})\mathrm{d}v_g\leqslant\frac{1}{\rho_2^\Lambda}\int_{B(\rho_2)}F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})\mathrm{d}v_g.\tag{6}$$

证明　取 $D=B(t),X=\frac{1}{2}\nabla^Mr^2=r\frac{\partial}{\partial r}$,有

$$\int_{B(t)}S_{f,H}^F(r\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r})\mathrm{d}s_g=\frac{1}{2}\int_{B(t)}\langle S_{f,H}^F,\mathrm{Hess}_g(r^2)\rangle\mathrm{d}v_g.\tag{7}$$

通过计算可得:

$$\begin{aligned}S_{f,H}^F(r\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r})&=F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})\langle r\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\rangle-\\&F'(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})\langle\mathrm{d}f_H(r\frac{\partial}{\partial r}),\mathrm{d}f_H(\frac{\partial}{\partial r})\rangle=\\&rF(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})-rF'(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})|\mathrm{d}f_H|^2.\end{aligned}\tag{8}$$

由式(5)、式(7)和式(8)可得

$$t\int_{\partial B(t)}F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})\mathrm{d}s_g-t\int_{\partial B(t)}F'(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})|\mathrm{d}f_H|^2\mathrm{d}s_g\geqslant\Lambda\int_{B(t)}F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})\mathrm{d}v_g.\tag{9}$$

由余面积公式和式(9)可得

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\partial B(t)}F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})\mathrm{d}v_g-\Lambda\int_{B(t)}F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})\mathrm{d}v_g\geqslant t\int_{\partial B(t)}F'(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})|\mathrm{d}f_H|^2\mathrm{d}s_g.\tag{10}$$

所以对任意的 $0<\rho_1\leqslant\rho_2$ 有

$$\frac{1}{\rho_1^\Lambda}\int_{B(\rho_1)}F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})\mathrm{d}v_g\leqslant\frac{1}{\rho_2^\Lambda}\int_{B(\rho_2)}F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})\mathrm{d}v_g.$$

证毕.

从定理 4 的单调性,可以得到下面的命题.

命题 1　设$f:(M,g)\to(N,H(N),J,\theta)$是 F-CC 调和映射,如果存在一个正整数 Λ 使得

$$\langle S_{f,H}^F,\mathrm{Hess}(r^2)\rangle\geqslant2\Lambda F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2}),$$

假设 f 不是一个常值映射,那么

$$\int_{B(R)}F(\frac{|\mathrm{d}f_H|^2}{2})\mathrm{d}v_g\geqslant C(f)R^\sigma,(R\to\infty),$$

其中 $c(f)>0$,并且是一个仅与 f 有关的常数.

假设$f:(M,u^2g_0)\to(N,H(N),J,\theta)$是 F-CC 调和映射,N 是一个 Sasakian 流形,假设 u 满足

(u_1) 如果$\frac{\partial\log u}{\partial r}\geqslant0$(或$\frac{\partial\log u}{\partial r}\leqslant0$),存在常数 σ 使得

$$(m-2d_F)r\frac{\partial\log u}{\partial r}+\frac{(m-1)}{2}\lambda_{\min}+1-d_F\max\{2,\lambda_{\max}\}\geqslant\sigma,$$

或

$$(m-2l_F)r\frac{\partial\log u}{\partial r}+\frac{(m-1)}{2}\lambda_{\min}+1-d_F\max\{2,\lambda_{\max}\}\geqslant\sigma;$$

(u_2) σ 是(u_1)中的常数,存在常数 $C_1>0,R_0>0$ 使得

$$\left(\int_R^\infty\frac{\mathrm{d}r}{\int_{\partial B(r)}u^{m-2}(x)\mathrm{d}s_{g_0}}\right)^{-1}\leqslant C_1R^\sigma,R>R_0.$$

定理 5 设 $f:(M,u^2g_0)\to(N,H(N),J,\theta)$ 是 F-CC 调和映射,N 是一个 Sasakian 流形,假设 u 满足(u_1)和(u_2),$l_F>0$,$F'(\frac{|df_H|^2}{2})<+\infty$.当 $r(x)\to+\infty$时,$f(x)\to P_0$,则 $df_H=0$,即 $f(M)$ 的像落在 N 的一根纤维中.

证明 由于 N 是 Sasakian 流形,则存在 P_0 的邻域 U 和黎曼流形 B,使得 $\pi:U\to B$ 是一个黎曼淹没.另外,纤维是指 N 中沿 Reeb 方向 T 的积分曲线.因为当 $r(x)\to+\infty$时,$f(x)\to P_0$,所以存在 $R_1>0$ 使得当 $r(x)>R_1$ 时 $f(x)\in U$.

设 $M_{R_1}=\{x\in M:r(x)>R_1\}$,由以上讨论可知,复合映射 $\pi\circ f:M_{R_1}\to B$ 是调和的,另一方面,当 $r(x)\to+\infty$时,$(\pi\circ f)(x)\to\pi(P_0)\in B$.由文献[12]中命题 4.1 可知 $\int_{B(R)}F(\frac{|df|^2}{2})dv_g$ 的上界,即当 R 充分大时有

$$\int_{B(R)}F(\frac{|d(\pi\circ f)_H|^2}{2})dv_g\leqslant C(\frac{\eta(R)}{2l_F}+\frac{\tilde{C}(\pi\circ f)}{R^\sigma})R^\sigma,$$

其中 C 是常数,$\eta(r)>0$ 是一个非增的函数.当 $r\to+\infty$时,$\eta(r)\to0$,$\tilde{C}(\pi\circ f)$是仅依赖于$(\pi\circ f)$的常数,则

$$\int_{B(R)}F(\frac{|df_H|^2}{2})dv_g\leqslant C(\frac{\eta(R)}{2l_F}+\frac{\tilde{C}(\pi\circ f)}{R^\sigma})R^\sigma.$$

由命题 1 和上式得出矛盾.因此得知 $df_H|_M=0$.证毕.

推论 2 设 $f:(M,g)\to(N,H(N),J,\theta)$ 是从具有极点 x_0 的完备流形到 Sasakian 流形的 F-CC 调和映射,假设 M 的径向曲率 K_r 满足和引理 5 相同的条件,则对任意的 $0<\rho_1\leqslant\rho_2$ 有

$$\frac{1}{\rho_1^\Lambda}\int_{B(\rho_1)}F(\frac{|df_H|^2}{2})dv_g\leqslant\frac{1}{\rho_2^\Lambda}\int_{B(\rho_2)}F(\frac{|df_H|^2}{2})dv_g,$$

其中

$$\Lambda=\begin{cases}m-\dfrac{2d_F\alpha}{\beta}, & \text{若 } K_r \text{ 满足(i)},\\ 1+(m-1)(1-\dfrac{B}{2\varepsilon})-2d_Fe^{\frac{A}{2\varepsilon}}, & \text{若 } K_r \text{ 满足(ii)},\\ 1+(m-1)\dfrac{1+\sqrt{1-4b^2}}{2}-d_F\dfrac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}, & \\ & \text{若 } K_r \text{ 满足(iii)}.\end{cases}$$

证明 如果 M 的径向曲率 K_r 满足和引理 5 相同的条件,那么存在一个正数 Λ 使得

$$\langle S_{f,H}^F,\mathrm{Hess}(r^2)\rangle\geqslant\Lambda F(\frac{|df_H|^2}{2}),\tag{11}$$

然后应用定理 4,即可得到此结果.证毕.

引理 6[9] 设 $f:(M,g)\to(N,H(N),J,\theta)$ 是一个光滑映照.如果 $df_H=0$,那么 $f(M)$ 一定落在某根纤维中,这里的纤维是指 N 中沿 Reeb 方向 T 的积分曲线.

定理 6 设 $f:(M,g)\to(N,H(N),J,\theta)$ 是从具有极点 x_0 的完备流形到 Sasakian 流形的 F-CC 调和映射,$r(x)$ 表示与 g 有关,从 x_0 出发的距离函数,如果存在正常数 Λ 使得

$$\langle S_{f,H}^F,\mathrm{Hess}(r^2)\rangle\geqslant2\Lambda F(\frac{|df_H|^2}{2}),$$

且

$$\int_{B(r)}F(\frac{|df_H|^2}{2})dv_g=o(r^\Lambda),$$

则 $df_H=0$,即 $f(M)$ 落在 N 的一根纤维中.

证明 由定理 4 可知,对于任意的 $0<\rho<r$,可以得到如下不等式:

$$\frac{1}{\rho^\Lambda}\int_{B(\rho)}F(\frac{|df_H|^2}{2})dv_g\leqslant\frac{1}{r^\Lambda}\int_{B(\rho_2)}F(\frac{|df_H|^2}{2})dv_g.$$

令 $r\to\infty$,在假设的条件下,可以推断出

$$\int_{B(\rho)}F(\frac{|df_H|^2}{2})dv_g=0.$$

因为 ρ 是任意的,所以 $df_H=0$.由引理 6 可得,$f(M)$ 的像一定落在 N 的一根纤维中.证毕.

5 结语

首先引入了 F-CC 调和映射的水平能量泛函,从它的第一变分公式可知 F-CC 调和映射是此能量泛函的临界点.接下来引入 F-水平应力-能量张量,利用水平应力-能量张量的方法证明了 F-CC 调和映射的一些单调公式以及利用此单调公式建立该调和映射的刘维尔型定理.

参考文献:

[1] CHENG J H, CHIU H L, YANG P. Uniformization of spherical CR manifolds[J]. Advances in Mathematics,2014, 255: 182-216.

[2] TIPLER C, VAN COEVERING C. Deformations of constant scalar curvature Sasakian metrics and K-stability[J]. International Mathematics Research Notices, 2015(22): 11566-11604.

[3] 韩英波,张倩玉,喻丽菊.CC-稳态映射的刘维尔型定理[J].信阳师范学院学报(自然科学版),2017, 30(1):22-27.
HAN Yingbo, ZHANG Qianyu, YU Liju. Liouville type theorems for CC-stationary maps[J]. Journal of Xinyang Normal University(Natural Science Edition), 2017, 30(1): 22-27.

[4] HAN Yingbo, JIANG Kaige, LIANG Mingheng. Subgradient estimates for a nonlinear subelliptic equation on complete pseudo Hermitian manifold[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2018, 55(1): 175-186.

[5] LI Songying, WANG Xiaodong. An Obata-type theorem in CR geometry[J]. Journal of Differential Geometry, 2013, 95(3):

483-502.

[6] 种田,东瑜昕,任益斌.拟 Hermite 流形间拟调和映照的不稳定性问题[J].中国科学:数学,2015, 45(6):795-818.
CHONG Tian, DONG Yuxin, REN Yibin. Instability of pseudo-harmonic maps between pseudo-Hermite manifolds [J]. Science in China(Series A), 2015, 45(6): 795-818.

[7] CHONG Tian, DONG Yuxin, REN Yibin. Liouville type theorems for *CC*-harmonic maps form Riemannian manifolds to pseudo-Hermitian manifolds[J]. Annals of Global Analysis and Geometry, 2017, 52: 25-44.

[8] Webster S. Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurfaces[J]. Journal of Differential Geometry, 1978, 13: 25-41.

[9] 种田.*CC-p* 调和映照的 Liouville 型定理[J].上海第二工业大学学报,2017, 34(1):43-48.
CHONG Tian. Liouville type theorems for *CC-p* harmonic maps [J]. Journal of Shanghai Second Polytechnic University, 2017, 34(1): 43-48.

[10] BAIRD P, EELLS J. A conservation law for harmonic maps[M]. New York: Springer, 1982: 1-25.

[11] DONG Yuxin, WEI Shishu. On vanishing theorems for vector bundle valued-forms and their applications[J]. Comm Math Phys, 2011, 304(2): 329-368.

[12] JIN Zhiren. Liouville theorems for harmonic maps[J]. Inventiones Mathematicae, 1992, 108(1): 1-10.

[13] KASSI M. A Liouville theorem for *F*-harmonic maps with finite-energy[J]. Electron J Differ Equ, 2006(15): 285-296.

[14] DONG Yuxin, LIN Hezi, YANG Guilin. Liouville theorems for *F*-Harmonic maps and their applications[J]. Results in Mathematics, 2016, 69(1/2): 105-127.

[15] HAN Yingbo, LI Ye, REN Yibin, et al. New comparison theorems in Riemannian geometry[J]. Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica(New Series), 2014, 9(2): 163-186.

[16] 韩英波,蒋凯歌,张倩玉.具有势函数的拟-*F*-调和映射的若干结果[J].信阳师范学院学报(自然科学版),2018, 31(1):5-10.
HAN Yingbo, JIANG Kaige, ZHANG Qianyu. Some results for quasi-*F*-harmonic maps with potential[J]. Journal of Xinyang Normal University(Natural Science Edition), 2018, 31(1): 5-10.

责任编辑:郭红建

(上接第 30 页)

[14] ONOZUKA D, HASHIZUME M. The influence of temperature and humidity on the incidence of hand, foot, and mouth disease in Japan[J]. Science of the Total Environment, 2011, 410/411: 119-125.

[15] WANG P, GOGGINS W B, CHAN E Y. Hand, foot and mouth disease in Hong Kong: A time-series analysis on its relationship with weather[J]. PLOS One, 2016, 11(8): e0161006.

[16] 卢小敏,储海燕,吴冬梅,等.盐城市空气污染物对手足口病发生风险的影响研究[J].中国妇幼健康研究,2018(3): 276-280.
LU Xiaomin, CHU Haiyan, WU Dongmei, et al. Influence of air pollutants on occurrence risk of hand-foot-mouth diseases in Yancheng city[J]. Chinese Journal of Woman and Child Health Research, 2018(3): 276-280.

[17] HUANG Ruixue, BIAN Guolin, HE Tianfeng, et al. Effects of meteorological parameters and PM10 on the incidence of hand, foot and mouth disease in children in China[J]. International Journal of Environmental Research and Public Health, 2016, 13(5): 481.

[18] LIN Hualiang, ZOU Hong, WANG Qinzhou, et al. Short-term effect of El Nino-Southern oscillation on pediatric hand, foot and mouth disease in shenzhen, China[J]. PLOS One, 2013, 8(7): e65585.

[19] BO Yanchen, SONG Chao, WANG Jinfeng, et al. Using an autologistic regression model to identify spatial risk factors and spatial risk patterns of hand, foot and mouth disease (HFMD) in Mainland China[J]. BMC Public Health, 2014, 14(1): 358.

[20] 彭晓武,王家春,余松林.R 软件及其环境流行病学应用[M].北京:中国环境出版社,2013.
PENG Xiaowu, WANG Jiachun, YU Songlin. R and its applications in environmental epidemiology [M]. Beijing: China Environmental Press, 2013.

[21] LIN Y C, JUAN H C, CHENG Y C. Ozone exposure in the culture medium inhibits enterovirus 71 virus replication and modulates cytokine production in rhabdomyosarcoma cells[J]. Antivir Res, 2007, 76: 241-251.

责任编辑:郭红建