·基础理论研究·

续论 Lebesgue-Stieltjes 测度

胡　明

(景德镇高等专科学校 数学与计算机系, 江西 景德镇 333000)

摘　要: 以单调递增左连续有界函数 f 给出了 Lebesgue-Stieltjes 测度的概念, 进一步讨论了由它产生的若干相应的性质.

关键词: Borel 测度; V_f^*-可测集; 单调递增函数; 左连续函数; 有界函数

中图分类号: O174.12　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1003-0972(2004)04-0392-03

Lebesgue-Stieltjes 测度是由单调递增右连续的实值函数 f 导出的[1]. 如果把 f 改成单调递增左连续的实值函数, 并直接引出一个集函数 v, 由此得到 Lebesgue-Stieltjes 测度的变化形式, 一改文献[1]中 Lebesgue-Stieltjes 测度的导出方式.

定义　设 f 是定义在实数集 R^1 上的单调递增左连续的有界函数, 对半开区间 $[a, b) \subset R^1$ 令:

$$v[a, b) = f(b) - f(a),$$

$\forall A \subset R^1$ 定义:

$$V_f^*(A) = \inf\left\{ \sum_k v[a_k, b_k) \,\middle|\, A \subset \bigcup_k [a_k, b_k) \right\}.$$

定理 1　V_f^* 是度量外测度.

证明　(1) 显然 $\forall A \subset R^1$, $V_f^*(A) \geq 0$, 对任意单调递增数列 $\{a_n\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\because \Phi \subset [a_n, 0)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $\therefore V_f^*(\Phi) \leq v[a_n, 0) = f(0) - f(a_n)$,

又 f 左连续, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(0)$, $V_f^*(\Phi) \leq 0$, $V_f^*(\Phi) = 0$.

(2) $\forall A, B \subset R^1$, 并且 $A \subset B$.

若 $V_f^*(B) = +\infty$, 自然有 $V_f^*(A) \leq V_f^*(B)$;

若 $V_f^*(B) < +\infty$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 存在区间列 $\{[a_k, b_k)\}$, 使得 $B \subset \bigcup\limits_k [a_n, b_k)$, 并且

$$V_f^*(B) + \epsilon > \sum_k v[a_k, b_k).$$

然而, 由 $A \subset B$, 必有 $\sum\limits_k v[a_k, b_k) \geq V_f^*(A)$, 因此 $V_f^*(A) \leq V_f^*(B)$.

(3) 设 $A_k \subset R^1$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 若存在 k_0 使 $V_f^*(A_{k_0}) = +\infty$, 则 $V_f^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} V_f^*(A_k)$;

否则 $V_f^*(A_k) < +\infty$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 那么 $\forall \epsilon > 0$, $\forall k$ 存在区间列 $\{[a_{kj}, b_{kj})\}$ 使得

$$A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_{kj}, b_{kj}), \text{ 并且 } V_f^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k} > \sum_{j=1}^{\infty} v[a_{kj}, b_{kj}),$$

所以, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} v[a_{kj}, b_{kj})$, 且

$$V_f^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} v[a_{kj}, b_{kj}) < \sum_{k=1}^{\infty}\left(V_f^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k}\right) < \sum_{k=1}^{\infty} V_f^*(A_k) + \epsilon,$$

所以 $V_f^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} V_f^*(a_k)$, 综上述可知, V_f^* 是一个外测度.

$\forall A, B \subset R^1$, 令 $d(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}$, 若 $d(A, B) = \delta > 0$.

如果 $V_f^*(A \cup B) = +\infty$, 自然有:

$$V_f^*(A) + V_f^*(B) \leq V_f^*(A \cup B).$$

如果 $V_f^*(A \cup B) < +\infty$, $\forall \epsilon > 0$, 存在区间列 $\{[a_k, b_k)\}$ 使得 $A \cup B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k)$, 并且

$$0 < b_k - a_k < \frac{\delta}{2} \ (k = 1, 2, \cdots),$$

$$V_f^*(A \cup B) + \epsilon > \sum_{k=1}^{\infty} v[a_k, b_k).$$

令 $M_1 = \{[a_k, b_k) : A \cap [a_k, b_k) \neq \varnothing$, $M_2 = \{[a_k, b_k) : B \cap [a_k, b_k) \neq \varnothing\}$ 则 $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ 并且

收稿日期: 2004-02-19
作者简介: 胡　明(1960-), 男, 江西波阳人, 学士, 副教授, 主要从事代数学的研究.

$$V_f^*(A\cup B)+\epsilon>\sum_{k=1}^{\infty}v[a_k,b_k)\geq$$
$$\sum_{[a_k,b_k)\in M_1}v[a_k,b_k)+\sum_{[a_k,b_k)\in M_2}v[a_k,b_k)\geq$$
$$V_f^*(A)+V_f^*(B).$$

令$\epsilon\to0$有$V_f^*(A\cup B)\geq V_f^*(A)+V_f^*(B)$. 另一方面由外测度的半可加性有

$$V_f^*(A\cup B)\leq V_f^*(A)+V_f^*(B),$$

综上述,若$d(A,B)=\delta>0$,必有

$$V_f^*(A\cup B)=V_f^*(A)+V_f^*(B).$$

所以,V_f^*是一个度量外测度. 证毕

令$\sum(V_f^*)=\{A:A\subset R^1, A$ 是V_f^*可测集$\}$,则$\sum(V_f^*)$是σ-代数,并且R^1上每个Borel集都是V_f^*可测集.

定理2 $\forall A\subset R^1$,存在Borel集$B\subset R^1$,使得$A\subset B$,并且$V_f^*(A)=V(B)$. 其中:$V=V^*\big|_{\sum(V_f^*)}$,V^*是Borel测度.

证明 如果$V_f^*(A)=+\infty$,令$B=R^1$,则$A\subset B$,且$V_f^*(A)=V(B)$.

如果$V_f^*(A)<+\infty$,$\forall\frac{1}{k}>0$, $k=1,2,\cdots$,存在区间列$\{[a_{kj},b_{kj})\}$,使得$A\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}[a_{kj},b_{kj})$,且

$$V_f^*(A)+\frac{1}{k}>\sum_{j=1}^{\infty}v[a_{kj},b_{kj}),$$

令$B=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}[a_{kj},b_{kj})$,则$B$ 是Borel集,$A\subset B$,且

$$V(B)=V_f^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}[a_{kj},b_{kj})\right)\leq$$
$$V_f^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}[a_{kj},b_{kj})\right)\leq\sum_{j=1}^{\infty}v[a_{kj},b_{kj})<$$
$$V_f^*(A)+\frac{1}{k}\ (\forall k).$$

令$k\to\infty$有:$V(B)\leq V_f^*(A)$.

另一方面,由于$A\subset B$,所以$V_f^*(A)\leq V_f^*(B)$,即$V_f^*(A)\leq V(B)$.

综上述:$V_f^*(A)=V(B)$. 证毕

定理3 如果μ为有限Borel测度,令$f_\mu(x)=\mu(-\infty,x)$, $x\in R^1$,则f_μ在R^1上是单调递增左连续的有界函数. 并且满足:$\lim\limits_{x\to-\infty}f_\mu(x)=0$.

证明 $\forall x_1,x_2\in R^1$,若$x_1<x_2$, $\because(-\infty,x_2)=(-\infty,x_1)\cup[x_1,x_2)$,

$$\therefore\mu(-\infty,x_2)=$$
$$\mu(-\infty,x_1)+\mu[x_1,x_2)\geq$$
$$\mu(-\infty,x_1)\ (\because\mu\text{为Borel测度}).$$

$\therefore f_\mu(x_1)\leq f_\mu(x_2)$,即$f_\mu$在$R^1$上单调递增.

$\forall x_0\in R^1$,任取单调递增数列$\{x_n\}$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,由于$\mu$为Borel测度,于是

$$\lim_{n\to\infty}\mu[x_n,x_0)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}[x_n,x_0)\right)=\mu(\Phi)=0.$$

又$f_\mu(x_0)=\mu(-\infty,x_0)=$

$$\mu\{(-\infty,x_n)\cup[x_n,x_0)\}=$$
$$\mu(-\infty,x_n)+\mu[x_n,x_0)=$$
$$f_\mu(x_n)+\mu[x_n,x_0),$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}f_\mu(x_n)=f(x_0)$,所以$f_\mu$在$R^1$上是左连续的.

因为在R^1上是有限Borel测度,于是$\mu(R^1)<+\infty$,所以$\forall x\in R$有

$$0\leq f_\mu(x)=\mu(-\infty,x)\leq\mu(R^1)<+\infty,$$

所以f_μ在R^1上是有界函数.

任取单调递减数列$\{y_n\}$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\infty$,于是

$$\lim_{n\to\infty}f_\mu(y_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(-\infty,y_n)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\mu\left\{\bigcap_{k=1}^{n}(-\infty,y_n)\right\}=$$
$$\mu(\Phi)=0,$$

即$\lim\limits_{n\to-\infty}f_\mu(x)=0$. 证毕

定理4 如果f是R^1上单调递增左连续的实函数,则$V=V^*\big|_{\sum(V_f^*)}$满足:

$\forall[a,b)\subset R^1$有

$$V[a,b)=f(b)-f(a),$$
$$V\{a\}=f(a+0)-f(a).$$

证明 对任意区间列$\{[a_k,b_k)\}$,满足$[a,b)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)$,因为$f$是$R^1$上单调递增左连续函数,所以$\forall\epsilon>0$以及每个$a_k$,必存在$a_k'$使得:$a_k'<a_k$,并且$f(a_k')+\frac{\epsilon}{2^k}>f(a_k)$.

因此$\forall b'\in[a,b)$有:$[a,b']\subset[a,b)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k',b_k)$,根据有限覆盖定理,存在有限个开区间将$[a,b']$盖住. 不失一般性,设$[a,b']\subset\bigcup_{k=1}^{N}(a_k',b_k)$,并满足条件:

$$a_k'<b_{k+1},\ b'<b_1,\ a_N'<a\ (k=1,2,\cdots,N-1),$$

那么:

$$\sum_{k=1}^{\infty}v[a_k,b_k)\geq\sum_{k=1}^{N}v[a_k,b_k)=$$
$$\sum_{k=1}^{N}\{f(b_k)-f(a_k)\}=$$
$$f(b_1)-f(a_N)+\sum_{k=1}^{N-1}\{f(b_{k+1})-f(a_k)\},$$

而 $f(b_1)-f(a_N)=f(b_1)-f(a'_N)+f(a'_N)-f(a_N)\geq f(b')-f(a)-\frac{\epsilon}{2^k}$.

$$\sum_{k=1}^{N-1}\{f(b_{k+1})-f(a_k)\}=\sum_{k=1}^{N-1}\{f(b_{k+1})-f(a'_k)\}+\sum_{k=1}^{N-1}\{f(a'_k)-f(a_k)\}\geq\sum_{k=1}^{N-1}\{f(a'_k)-f(a_k)\}>\sum_{k=1}^{N-1}\left(-\frac{\epsilon}{2^k}\right)>-\epsilon.$$

于是: $\sum_{k=1}^{\infty}v[a_k,b_k)\geq f(b')-f(a)-2\epsilon$, 令 $\epsilon\to 0$, $b'\to b-0$, 故有 $\sum_{k=1}^{\infty}v[a_k,b_k)\geq f(b)-f(a)$, 所以

$$V_f^*[a,b)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}v[a_k,b_k):[a,b)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)\right\}\geq f(b)-f(a),$$

而 $V_f^*[a,b)\leq f(b)-f(a)$ 是显然的. 所以 $V_f^*[a,b)=f(b)-f(a)$, 又因为 $[a,b)$ 是 R^1 上的 Borel 集, 所以 $V[a,b)=V_f^*[a,b)=f(b)-f(a)$.

$$V\{a\}=V\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}[a,a+\frac{1}{n})\right\}=\lim_{n\to\infty}V[a,a+\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\left\{f(a+\frac{1}{n})-f(a)\right\}=f(a+0)-f(a).$$

证毕

定理 5 设 $F_1=\{f: f$ 是 R^1 上单调递增左连续的有界函数, 且 $\lim_{n\to\infty}f(x)=0\}$, 令: $F_2=\{\mu:\mu$ 是 R^1 上的有限 Borel 测度$\}$, 则 $|F_1|=|F_2|$.

证明 令: $\varphi: F_2\longrightarrow F_1$, $\mu\longmapsto f_\mu$, 其中:

$$f_\mu(x)=\mu(-\infty,x),\ \forall x\in R^1.$$

由定理 3, f_μ 是 R^1 上单调递增左连续的有界函数. 于是 φ 是 $F_2\longrightarrow F_1$ 的映射.

$\forall\mu_1,\mu_2\in F_2$, 如果 $\mu_1\neq\mu_2$, 则必存在区间 $[a,b)\subset R^1$ 使得 $\mu_1[a,b)\neq\mu_2[a,b)$ 即

$$f_{\mu_1}(b)-f_{\mu_1}(a)\neq f_{\mu_2}(b)-f_{\mu_2}(a),$$

所以 $f_{\mu_1}(b)\neq f_{\mu_2}(b)$ 或者 $f_{\mu_1}(a)\neq f_{\mu_2}(a)$ 至少有一个成立, 于是 $f_{\mu_1}\neq f_{\mu_2}$, 于是 φ 是 $F_2\longrightarrow F_1$ 的单射.

$\forall f\in F_1$ 由定理 4 可知 $V=V^*|_{\sum(V_f^*)}$ 是 Borel 测度, 并且 $\forall[a,b)\subset R^1$ 有

$$V[a,b)=f(b)-f(a).$$

所以 $\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}V[a,b)=f(+\infty)-f(-\infty)=f(+\infty)$, 即 $V(-\infty,+\infty)=f(+\infty)$, 由于 f 是单调有界函数, 所以 V 是有限 Borel 测度, 所以 $V\in F_2$, $\varphi(V)=f_V$, 并且 $\forall x\in R^1$ 有:

$$f_V(x)=V(-\infty,x)=f(x)-f(-\infty)=f(x),$$

即 $\varphi(V)=f$, 所以 φ 又是 $F_2\longrightarrow F_1$ 的满射. 综上述有: $|F_1|=|F_2|$. 证毕

参考文献:

[1] 侯友良. 实变函数[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.

[2] 周明强. 实变函数[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985.

A continuation of study Lebesgue-Stieltjes measure

HU Ming

(Department of Mathematics and Computer, Jingdezhen College, Jingdezhen 333000, China)

Abstract: This paper gives a concept of Lebesgue-Stieltjes measure in monotone increasing left continuous bounded function and discuss some properties

Key words: Borel measure; V_f^*-measurable set; monotone increasing function; left continuous function; bounded function

责任编校: 郭红建