信阳师范学院学报(自然科学版)
第 16 卷　第 4 期　2003 年 10 月

Journal of Xinyang Normal University
(Natural Science Edition) Vol. 16 No. 4 Oct. 2003

·基础理论研究·

双参数非线性方程边值问题的奇摄动

陈育森, 黄蔚章

(福建师范大学 福清分校, 福建 福清 350300)

摘　要: 研究一类双参数高阶半线性方程边值问题的奇摄动, 讨论了摄动解随两参数的不同量级所呈现的不同性态的边界层现象. 利用微分不等式证明了解的存在, 并估计了余项.

关键词: 半线性; 两参数; 奇摄动; 微分不等式

中图分类号: O175　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1003-0972(2003)04-0373-04

0　引言

带有两个或两个以上小参数的高阶微分方程奇摄动的"层中层"现象, 在文[1～2]中早已提出, 近年来有一些成果[3], 但尚未引起进一步的关注. 笔者在文献[4～6]中针对二阶方程初值问题:

$$\begin{cases} \mu y''=f(t,y,\epsilon y'), \\ y(o,\epsilon,\mu)=A(\epsilon,\mu), \\ y'(o,\epsilon,\mu)=B(\epsilon,\mu), \end{cases}$$

中两参数 μ,ϵ 的不同量级进行了讨论, 发现当 $\mu=o(\epsilon^2)$ 时, 在 $x=0$ 附近出现两个"厚度"不同的初始层, 形成所谓"层中层"或称之为"套层". 而当 $\mu=O(\epsilon^2)$ 时, "套层"现象却消失. 为探讨"套层"现象的一般规律, 文中就一类双参数三阶半线性边值问题

$$\mu y'''+\epsilon a(t)y''+b(t)y=f(t,y) \tag{1}$$

$$\begin{cases} y(0,\epsilon,\mu)=\bar{\alpha}(\epsilon,\mu), \\ y(1,\epsilon,\mu)=\bar{\beta}(\epsilon,\mu), \\ y'(1,\epsilon,\mu)=\bar{\gamma}(\epsilon,\mu), \end{cases} \tag{2}$$

讨论了当 $\mu=o(\epsilon^2)$ 和 $\mu=O(\epsilon^2)$ 时, 摄动解呈现的不同性态的边界层性质. 利用微分不等式理论, 证明了解的存在, 并给出了解一致有效的渐近展开式. 文中恒设

(Ⅰ) $a(t), b(t), f(t,y)$ 及 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ 关于其变元充分光滑.

(Ⅱ) 存在常数 $m>0$ 和 $d>0$ 使得当 $t\in[0,1]$ 时, $a(t)\leq -m$, $b(t)\geq m$ 和 $(t,y)\in[0,1]\times R$ 时 $f'_y\geq d$.

1　主要结果

为了证明本文的主要结果, 需要引进有关的微分不等式理论.

设边值问题

$$y'''=h(t,y,y',y'') \tag{3}$$

$$y(a)=\alpha, y(b)=\beta, y'(b)=\gamma \tag{4}$$

引进如下定义: 若存在 $\bar{\omega}(t), \omega(t)\in C^3[a,b]$, 使得当 $(t,y)\in[a,b]\times[\bar{\omega},\omega]$ 时

$$\bar{\omega}'''\leq h(t,y,\bar{\omega}',\bar{\omega}''),\ \omega'''\geq h(t,y,\omega',\omega''),$$

则分别称 $\bar{\omega}(t), \omega(t)$ 为方程(3)于 $[a,b]$ 上的上解和下解.

引理[7,8]　若存在方程(3)于 $[a,b]$ 上的上解 $\bar{\omega}(t)$ 和下解 $\omega(t)$, 使得

(i) $h(t,y,z,w)$ 在 $[a,b]\times[\bar{\omega},\omega]\times[\omega',\bar{\omega}']\times R$ 上连续;

(ii) $h(t,y,z,w)$ 满足 Nagumo 条件, 即当 $(t,y,z)\in[a,b]\times[\bar{\omega},\omega]\times[\omega',\bar{\omega}']$ 时, $h(t,y,z,w)=O(w^2)$, $(|w|\to\infty)$;

(iii) $\bar{\omega}(a)\leq\alpha\leq\omega(a)$, $\bar{\omega}(b)\leq\beta\leq\omega(b)$, $\omega'(b)\leq\gamma\leq\bar{\omega}'(b)$,

那么边值问题(3)～(4)存在解 $y=y(t)$ 于区间 $[a,b]$ 且满足不等式

$$\bar{\omega}(t)\leq y(t)\leq\omega(t),\ a\leq t\leq b.$$

收稿日期: 2003-03-26

基金项目: 福建省教育厅科技项目(JB00040)

作者简介: 陈育森(1946-), 男, 福建福清人, 教授, 主要研究非线性奇摄动理论及应用.

1. 当 $\mu_1=\frac{\mu}{\epsilon^2}\to 0,\ \epsilon\to 0$ 时, 问题(1)(2)化为

$$\epsilon^2\mu_1 y'''+\epsilon a(t)y''+b(t)y'=f(t,y)\tag{5}$$

$$\begin{cases} y(o,\epsilon,\mu_1)=\alpha(\epsilon,\mu_1)\sim\sum\limits_{r=0}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{r}\alpha_{r-i,i}\epsilon^{r-i}\mu_1^i, \\ y(1,\epsilon,\mu_1)=\beta(\epsilon,\mu_1)\sim\sum\limits_{r=0}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{r}\beta_{r-i,i}\epsilon^{r-i}\mu_1^i, \\ y'(1,\epsilon,\mu_1)=\gamma(\epsilon,\mu_1)\sim\sum\limits_{r=0}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{r}\gamma_{r-i,i}\epsilon^{r-i}\mu^i, \end{cases}\tag{6}$$

这里 α,β,γ 具有性质 $\alpha(\epsilon,\mu_1)\equiv\bar{\alpha}(\epsilon,\epsilon^2,\mu_1)$.

设退化问题

$$b(t)u'_{\infty}=f(t,u_{\infty}),\ u_{\infty}(0)=\alpha_{\infty}\tag{7}$$

存在充分光滑的解 $u_{00}(t)$ 于区间 $[0,1]$ 上. 并设外解 $u(t,\epsilon,\mu_1)$ 有如下形式的渐近展开式

$$u(t,\epsilon,\mu_1)\sim u_{\infty}(t)+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{r}u_{r-i,i}(t)\epsilon^{r-i}\mu_1^i\tag{8}$$

令外解(8)满足

$$\begin{cases} \epsilon^2\mu_1 u'''+\epsilon a(t)u''+b(t)u'=f(t,u) \\ u(o,\epsilon,\mu_1)=\alpha(\epsilon,\mu_1) \end{cases}\tag{9}$$

把(8)代入(9)得到确定外解 $u(t,\epsilon,\mu_1)$ 各项系数 $u_{r-i,i}(t)$ 的递推方程

$$\begin{cases} b(t)u'_{r-i,i}=f'_y(t,u_{\infty}(t))u_{r-i,i} \\ \qquad +f_{r-i,i}(t)-u_{r-i-2,i-1} \\ \qquad -a(t)u''_{r-i-1,i}, \\ u_{r-i,i}(o)=\alpha_{r-i,i}, \end{cases}\tag{10$_{r-i,i}$}$$

其中 $i=0,1,2\cdots r,\ r=1,2,\cdots,\ f_{r-i,i}(t)$ 是 t 及 u_{lj} $(0\le l\le r-i,\ 0\le j\le i,\ 0\le l+j\le r-1)$ 的已知函数. 规定下标为负的项为零, 下同. 由已知条件知, $(10)_{r-i,i}$ 的解可是由 $u_{\infty}(t)$ 依次确定, 从而得到外解展开式(8). 一般说来, 外解 $u(t,\epsilon,\mu_1)$ 在 $t=1$ 不满足定解条件(6)中的第 2, 3 式. 问题(5)~(6)在 $t=1$ 附近出现非一致性, 为此引进伸长变量 $\tau_1=\frac{1-t}{\epsilon}$, 构造边界层校正函数

$$V(\tau_1,\epsilon,\mu_1)\sim V_{\infty}(\tau_1)+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{r}V_{r-i,i}(\tau_1)\epsilon^{r-i}\mu_l^i\tag{11}$$

并要求 $V(\tau_1,\epsilon,\mu_1)$ 具有性质 $V(+\infty)=0$. 令

$$y=u(t,\epsilon,\mu_1)+\epsilon V(\tau_1,\epsilon,\mu_1)\tag{12}$$

把(12)代入(5)~(6), 并注意到(9), 得到 $V(\tau_1,\epsilon,\mu_1)$ 当 $\beta_{\infty}=u_{\infty}(1)$ 时满足的初值问题:

$$\begin{cases} -\mu_1\frac{d^3V}{d\tau_1^3}+a(1-\epsilon\tau_1)\frac{d^2V}{d\tau_1^2}-b(1-\epsilon\tau_1)\frac{dV}{d\tau_1} \\ \quad =f(1-\epsilon\tau_1,u(1-\epsilon\tau_1)+\epsilon V) \\ \qquad -f(1-\epsilon\tau_1,u(1-\epsilon\tau_1)) \\ V(o,\epsilon,\mu_1)=\epsilon^{-1}[\beta(\epsilon,\mu_1)-u(1)-\epsilon\mu_1 w(0)], \\ V(+\infty,\epsilon,\mu_1)=0 \end{cases}\tag{13}$$

把(11)代入(13)得到确定边界层校正函数(11)各项系数的递推方程

$$\begin{cases} a(1)\frac{d^2V_{r-i,i}}{d\tau_1^2}-b(1)\frac{dV_{r-i,i}}{d\tau_1} \\ \quad =f'_y(1,u_{\infty}(1))V_{r-i-1,i}+g_{r-i,i}(\tau_1) \\ \qquad +\frac{d^3V_{r-i,i-1}}{d\tau_1^3} \\ \qquad -\sum\limits_{k=1}^{r-i}\frac{-\tau_1}{k!}a^{(k)}(1)V''_{r-i-k,i}(\tau_1) \\ \qquad +\sum\limits_{k=1}^{r-i}\frac{(-\tau_1)^k}{k!}b^{(k)}(1)V'_{r-i-k,i}, \\ V_{r-i,i}(o)=\beta_{r-i+1,i}-u_{r-i+1,i}(1) \\ \qquad -w_{r-i-1,i-1}(o), \\ V_{r-i,i}(+\infty)=0, \end{cases}\tag{14$_{r-i,i}$}$$

其中 $i=0,1,\cdots r,\ r=0,1,\cdots,\ w_{ij}$ 将在下文给出, $g_{r-i,i}(\tau_1)$ 是 $V_{ij}(\tau_1)$ $(0\le l\le r-i-1,\ 0\le j\le i,\ 0\le l+j\le r-2)$ 的不含常数项的多项式. $(14)_{\infty}$ 的解 $V_{\infty}(\tau_1)=(\beta_{10}-u_{10}(1))e^{\lambda_0\tau_1}$ $(\lambda_0=g(1)/f(1))$ 及其导数 $V_{\infty}^{(i)}(\tau_1)$ $(i=1,2,3)$ 当 $\tau_1\to+\infty$ 时, 均呈指数型衰减. 由 $g_{r-i,i}$ 的构造知由 $V_{\infty}(\tau_1)$ 可依次确定(11)的呈指数型衰减的各项系数 $V_{r-i,i}(\tau_1)$, 从而得到展开式(11). 但一般说来, $y=u(t,\epsilon,\mu_1)+\epsilon V(\tau_1,\epsilon,\mu_1)$ 在 $t=1$ 还是不满足定解条件(2)中的第 3 式, 说明摄动解在 $t=1$ 附近还存在"厚度"更"薄"的边界层, 从而在 $t=1$ 附近形成"层中层".

再次引进伸长变量 $\tau_2=\frac{\tau_1}{\mu_1}=\frac{1-t}{\epsilon\mu_1}$, 构造"厚度"为 $O(\epsilon\mu_1)$ 的边界层校正函数

$$w(\tau_2,\epsilon,\mu_1)\sim w_{\infty}(\tau_2)+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{r}w_{r-i,i}(\tau_2)\epsilon^{r-i}\mu^i\tag{15}$$

并要求 $w(\tau_2,\epsilon,\mu)$ 具有性质 $w(+\infty)=0$. 令

$$y=u(t,\epsilon,\mu_1)+\epsilon V(\tau_1,\epsilon,\mu)+\epsilon\mu_1 w(\tau_2,\epsilon,\mu)\tag{16}$$

把(16)代入(5)~(6)并注意到(9)和(13), 得到 $w(\tau_2,\epsilon,\mu_1)$ 满足的方程

$$\begin{aligned} &-\frac{d^3w}{d\tau_2^3}+a(1-\epsilon\mu_1\tau_2)\frac{d^2w}{d\tau_2^2}-\mu_1 g(1-\epsilon\mu_1\tau_2)\frac{dw}{d\tau_2} \\ &=\mu_1[f(1-\epsilon\mu_1\tau_2,u(1-\epsilon\mu_1\tau_2) \\ &\quad +\epsilon v(\mu_1\tau_2)+\epsilon\mu_1 w)) \\ &\quad -f(1-\epsilon\mu_1\tau_2,u(1 \\ &\quad -\epsilon\mu_1\tau_2)+\epsilon v(\mu\tau_2))] \end{aligned}\tag{17}$$

把(15)代入(17), 得到确定(15)式各项系数的递推方程

$$\begin{cases} -\dfrac{d^3 w_{r-i,i}}{d\tau_2^3}+a(1)\dfrac{d^2 w_{r-i,i}}{d\tau_2^2} \\ \quad = f'_y(1,u_{00}(1))w_{r-i-1,i-1} \\ \quad +\Phi_{r-i,i}(\tau_2)+b(1)\dfrac{d w_{r-i,i-1}}{d\tau_2} \\ \quad -\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{j}a_{j-k,k}w''_{r-i-j+k,i-k} \\ \quad +\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{j}b_{j-k,k}w'_{r-i-j+k,i-1-k}, \\ w'_{r-i,i}(o)=u'_{k-i,i}(1)-V'_{r-i,i}(0)-\gamma_{r-i,i}, \\ w'(+\infty)=0, w(+\infty)=0, \end{cases} \qquad (18)_{r-i,i}$$

这里 $i=0,1,\cdots r$, $r=0,1,\cdots$, $a_{j-k,k}$, $b_{j-k,k}$ 具有性质如:

$$a_{j-k,k}=\frac{1}{(j-k)!\ k!}\frac{\partial^j a(1-\epsilon\mu_1\tau)}{\partial\epsilon^{j-k}\mu_1^k}\Bigg|_{\substack{\epsilon=0\\ \mu_1=0}}$$

$\Phi_{r-i,i}(\tau_2)$ 是 $w_{ij}(\tau_2)$ $(0\le l\le r-i-1, 0\le j\le i-1, 0\le l+j\le r-3)$ 的不含常数项的多项式. $(18)_{00}$ 的解 $w_{00}(\tau_2)=(a(1))^{-1}(u'_{00}(1)-V'_{00}(0)-\gamma_{00})e^{f(1)\tau_2}$ 及其导数 $w^{(i)}_{00}(\tau_2)$ $(i=1,2)$, 当 $\tau_2\to+\infty$ 时呈指数型衰减. 由 $\Phi_{r-i,i}$ 的构造知, 由 $w_{00}(\tau_2)$ 可依次确定(15)的各项系数 $w_{r-i,i}(\tau_2)$, 且当 $\tau_2\to+\infty$ 时均呈指数型衰减, 从而得到展开式(15). 令

$$y_n(t)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{i=0}^{r}[u_{r-i,i}(t) + \epsilon V_{r-i,i}(\frac{1-t}{\epsilon})+\epsilon\mu_1 w_{r-i,i}(\frac{1-t}{\epsilon\mu_1})] \qquad (19)$$

由 n 阶渐近近似式(19)的构成可知, 存在正常数 M, 使得

$$\begin{cases} \left|\epsilon^2\mu_1 y'''_n+\epsilon a(t)y''_n+b(t)y'_n-f(t,y_n)\right|\le M\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i, \\ \left|y_n(0)-\alpha(\epsilon,\mu_1)\right|\le M\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i, \\ \left|y_n(1)-\beta(\epsilon,\mu_1)\right|\le M\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i, \\ \left|y'_n(1)-\gamma(\epsilon,\mu_1)\right|\le M\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i, \end{cases} \qquad (20)$$

定理 1 $\mu_1=\dfrac{\mu}{\epsilon^2}\to 0$, $\epsilon\to 0$ 时, 如果假设条件(Ⅰ)～(Ⅱ)成立, 那么当 ϵ, μ_1 充分小时, 问题(1)～(2)有解 $y(t)\in[0,1]$并满足

$$|y-y_n|\le L\,(3-e^{\frac{\lambda_1}{\epsilon}(1-t)}-e^{\frac{\lambda_2}{\epsilon\mu_1}(1-t)})\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i \qquad (21)$$

这里 $\lambda_1=O(1)$ 是方程 $\mu_1\lambda^3+m\lambda^2+m\lambda=0$ 的一个负根, $\lambda_2=O(1)$ 是方程 $\lambda^3+m\lambda^2+\mu m\lambda=0$ 的一个负根.

证明 令

$$\bar\omega(t,\epsilon,\mu_1)=y_n(t)-L\,(3-e^{\frac{\lambda_1}{\epsilon}(1-t)}-e^{\frac{\lambda_2}{\epsilon\mu_1}(1-t)})\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i,$$

$$\underline\omega(t,\epsilon,\mu_1)=y_n(t)+L\,(3-e^{\frac{\lambda_1}{\epsilon}(1-t)}-e^{\frac{\lambda_2}{\epsilon\mu_1}(1-t)})\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i,$$

当 $[t,y]\in[0,1]\times[\bar\omega,\underline\omega]$ 时,

$$\begin{aligned} &\epsilon^2\mu_1\bar\omega'''+\epsilon a(t)\bar\omega''+b(t)\bar\omega'-f(t,y) \\ &=[\epsilon\mu_1 y'''_n+\epsilon a(t)y''_n+b(t)y'_n-f(t,y_n)] \\ &\quad -L\epsilon^{-1}e^{\frac{\lambda_1}{\epsilon}(1-t)}(\mu_1\lambda_1^3-a(t)\lambda_1^2 \\ &\quad +b(t)\lambda_1)\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i \\ &\quad -L(\epsilon\mu_1^2)^{-1}e^{\frac{\lambda_2}{\epsilon\mu_1}(1-t)}(\lambda_2^3-a(t)\lambda_2^2 \\ &\quad +\mu b(t)\lambda_2)\sum_{i=1}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i \\ &\quad -[f(t,y)-f(t,y_n)] \\ &\le M\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1+i}\mu_1^i-f_y[t,\theta(y-y_n)](y-y_n) \\ &\hspace{18em}(0\le\theta\le 1) \\ &\le[M-Ld(3-e^{\frac{\lambda_1}{\epsilon}(1-t)}-e^{\frac{\lambda_2}{\epsilon\mu_1}(1-t)})]\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i \\ &\le(M-Ld)\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i\le 0 \qquad (L\ge\frac{M}{d}), \end{aligned}$$

所以 $\bar\omega(t,\epsilon,\mu_1)$ 是方程(1)于[0, 1]上的上解, 同理可知 $\underline\omega(t,\epsilon,\mu_1)$ 是方程(1)于[0, 1]上的下解, 下面证明 $\bar\omega(t,\epsilon,\mu_1)$, $\underline\omega(t,\epsilon,\mu_1)$ 满足引理的条件 (iii):

1^0
$$\begin{aligned} \bar\omega(0,\epsilon,\mu_1)&=y_n(0)-L\,(3-e^{\frac{\lambda_1}{\epsilon}}-e^{\frac{\lambda_2}{\epsilon\mu_1}})\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i \\ &\le\alpha(\epsilon,\mu_1)+M\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i-L\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i \\ &\le\alpha(\epsilon,\mu_1) \quad (L\ge M \text{ 时}). \end{aligned}$$

2^0
$$\begin{aligned} \bar\omega(1,\epsilon,\mu_1)&=y_n(1)-L\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i \\ &\le\beta(\epsilon,\mu_1)+(M-L)\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i \\ &\le\beta(\epsilon,\mu_1) \quad (L\ge M). \end{aligned}$$

3^0
$$\underline\omega'(1)=y'_n(1)+L\,(\frac{\lambda_1}{\epsilon}+\frac{\lambda_2}{\epsilon\mu_1})\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i$$

$$\le \gamma(\epsilon\mu_1) + [M + L(\frac{\lambda_1}{\epsilon} + \frac{\lambda_2}{\epsilon\mu_1})]\sum_{i=0}^{n+1}\epsilon^{n+1-i}\mu_1^i$$

$$\le \gamma(\epsilon, \mu_1) \quad (L > -\frac{\epsilon\mu_1 M}{\mu_1\lambda_1 + \lambda_2}).$$

同理有 $\omega(0, \epsilon, \mu_1) \ge \alpha(\epsilon, \mu_1)$, $\omega(1, \epsilon, \mu_1) \ge \beta(\epsilon, \mu_1)$ 和 $\bar{\omega}'(1, \epsilon, \mu_1) \ge \gamma(\epsilon, \mu_1)$, 故当 ϵ, μ_1 充分小时, 取 $L \ge \max\left\{\frac{M}{d}, M\right\}$, 根据引理 1 可知方程(1)～(2)存在解 $y(t) \in C^3[0, 1]$ 且满足 $\bar{\omega}(t) \le y(t) \le \omega(t)$. 定理得证. 证毕

定理 1 说明当 $\frac{\mu}{\epsilon^2} \to 0$, $\epsilon \to 0$ 时, 问题(1)～(2)的解在 $t = 1$ 附近出现"厚度"不同的"层中层"现象, 但当 $\mu = O(\epsilon^2)$ 时, 该现象消失.

2. 当 $\mu = O(\epsilon^2)$ 时, 为方便起见, 不妨设 $\mu = \epsilon^2$, 此时问题(1)～(2)化为

$$\epsilon^2 y''' + \epsilon a(t) y'' + b(t) y' = f(t, y) \tag{22}$$

$$\begin{cases} y(0, \epsilon) = \bar{\alpha}(\epsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\alpha}_i \epsilon^i, \\ y(1, \epsilon) = \bar{\beta}(\epsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\beta}_i \epsilon^i, \\ y'(0, \epsilon) = \bar{\gamma}(\epsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\gamma}_i \epsilon^i, \end{cases} \tag{23}$$

这里 $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ 具有性质为 $\bar{\alpha}(\epsilon) \equiv \bar{\alpha}(\epsilon, \epsilon^2)$.

设与(22)～(23)相应的退化问题

$$b(t)\bar{u}_0' = f(t, \bar{u}_0), \quad \bar{u}_0(0) = \bar{\alpha}_0 \tag{24}$$

存在充分光滑的解 $\bar{u}_0(t)$ 于 $0 \le t \le 1$ 上. 又设外解

$$\bar{u}(t, \epsilon) \sim \bar{u}_0(t) + \bar{u}_1(t)\epsilon + \bar{u}_2(t)\epsilon^2 + \cdots \tag{25}$$

把(25)代入(22)及(23)第一式得到确定(25)各项系数 $\bar{u}_i(t)$ 所满足的递推方程

$$b(t)\bar{u}_i' = F_i(t) - \bar{u}_{i-2}''' - a(t)\bar{u}_{i-1}'', \quad \bar{u}_i(0) = \bar{\alpha}_0 \tag{26$_i$}$$

其中 $F_i(t) = \left.\frac{\partial^i f(t, \sum_{i=1}^{\infty}\bar{u}_i(t)\epsilon^i)}{i!\ \partial\epsilon^i}\right|_{\epsilon=0}$, (26)$_i$ 是一阶方程, 其解可由 $\bar{u}_0$ 依次确定, 从而得到展开式(25). 但外解一般说来在 $t = 1$ 并不满足定解条件(23), 问题(22)～(23)在 $t = 1$ 附近出现非一致性, 为此引进伸长变量 $s_1 = \frac{1-t}{\epsilon}$, 在 $t = 1$ 附近构造具有性质 $\bar{V}(+\infty) = 0$ 的边界层校正项

$$\bar{V}(s_1, \epsilon) \sim \bar{V}_0(s_1) + \bar{V}_1(s_1)\epsilon + \bar{V}_2(s_1)\epsilon^2 + \cdots \tag{27}$$

令

$$y = \bar{u}(t, \epsilon) + \epsilon\bar{V}(s_1, \epsilon) \tag{28}$$

把(28)代入(22)～(23)得到

$$\begin{cases} \frac{d^3\bar{V}}{ds_1^3} - a(1-\epsilon s_1)\frac{d^2\bar{V}}{ds^2} + b(1-\epsilon s_1)\frac{d\bar{V}}{ds_1} \\ \quad = h(1-\epsilon s_1, \bar{u}(1-\epsilon s_1)) \\ \quad\quad - h(1-\epsilon s_1, \bar{u}(1-\epsilon s_1) + \epsilon\bar{V}), \\ \bar{V}(0, \epsilon) = \epsilon^{1}[\bar{\beta}(\epsilon) - \bar{u}(1)], \bar{V}(+\infty) = 0, \\ \bar{V}_i(0) = \bar{u}_i'(1) - \bar{\gamma}_1, \end{cases} \tag{29}$$

把(27)代入(29)得到 $\bar{V}_i(s_1)$, 当 $\bar{\beta}_0 = \bar{u}_0(1)$ 时所满足的递推方程

$$\begin{cases} -\frac{d^3\bar{V}_i}{ds_1^3} + a(1)\frac{d^2\bar{V}_i}{ds_1^2} - b(1)\frac{d\bar{V}_i}{ds_1} \\ \quad = h_y'(1, \bar{u}(1))\bar{V}_{i-1} + R_i(s_1) - \sum_{k=1}^{i}\frac{(-s_1)^k}{k!}a^{(k)}(1)\bar{V}''_{i-k} \\ \quad\quad - \sum_{k=1}^{i}\frac{(-s_1)^k}{k!}b^{(k)}(1)\bar{V}'_{i-k}, \\ \bar{V}_i(0) = \bar{\beta}_{i+1} - \bar{u}_{i+1}(1), \bar{V}_i(+\infty) = 0, \bar{V}_i(0) = \bar{u}_i'(1) - \bar{\gamma}_i, \end{cases} \tag{30$_i$}$$

其中 $i = 1, 2, \cdots$, $R_i(s_1)$ 是 $\bar{V}_l(0 \le l \le i-1)$ 的不含常数项的多项式, 方程(30)$_i$ 是常系数线性方程, 其解可依次求得, 且当 $s_1 \to +\infty$ 时, $\bar{V}_i(s_1) \to 0$, 于是得到具有边界层性质的展开式(27), 进而得到问题(1)～(2)当 $\mu = O(\epsilon^2)$ 时的 n 阶渐近近似式

$$y_n^*(t) = \sum_{i=0}^{n}(\bar{u}_i(t) + \epsilon\bar{V}_i(\frac{1-t}{\epsilon}))\epsilon^i \tag{31}$$

易知 $\bar{\omega}^*(t, \epsilon) = y_n^*(t) - L^*(2 - e^{\frac{\lambda_0}{\epsilon}(1-t)})\epsilon^{n+1}$, $\bar{\omega}^*(t, \epsilon) = y_n^*(t) + L^*(2 - e^{\frac{\lambda_0}{\epsilon}(1-t)})\epsilon^{n+1}$ 分别是方程(1)于 $[0, 1]$ 的上解与下解, 且当 $L^* \ge \max\left\{\frac{M^*}{d}, M^*\right\}$ 时满足引理的条件(iii), 这里 λ_0 是特征方程 $\lambda^3 + m\lambda^2 + m\lambda = 0$ 具有负实部的根, 正数 M^* 使相应于 y_n^* 的(20)式成立. 根据引理可推得如下结论:

定理 2　当 $\mu = O(\epsilon^2)$ 时, 如果假设(Ⅰ)～(Ⅱ)条件成立, 那么当 $\epsilon > 0$ 充分小时, 问题(1)～(2)有解并满足 $|y - y_n^*| \le L^*(2 - e^{\frac{\lambda_0}{\epsilon}(1-t)})\epsilon^{n+1}$.

y_n^* 由式(31)给出. 由定理 2 可知当 $\mu = O(\epsilon^2)$ 时, 问题的解在 $t = 1$ 附近不再出现"层中层"现象.

(下转第 388 页)

[6] SKELLAM J D. *Random dispersion in theoretical population*[J]. Biometrika, 1951, 38: 196-216.

[7] LEVIN S A. *Dispersion and population interactions*[J]. The Amer. Naturalist, 1973, 54(2): 315-325.

[8] LEVIN S A, SEGEL L A. *Hypothesis to explain the origin of planktonic patchness*[J]. Nature, 1976, 259, 659.

[9] LEVIN S A. *Spatial patterning and the structure of ecological communities*[A]. In *Some mathematical questions in biology* [C]. V II American Mathematical Society, Providence 1976.

[10] HASTINGS A. *Global stability in Lotka-Volterra systems with diffusion*[J]. J Math Biol, 1978: 163-168.

[11] TAKEUCHI Y. *Global stability in generalized Lotka-Volterra diffusion system* [J]. J Math Anal Applic, 1986, 116: 209-221.

[12] SONG X, CHEN L. *Persistence and periodic orbits for two-species predator-prey system with diffusion*[J]. Canadian Appl Math Quarterly, 1998, 6(3): 233-244.

[13] LI Y. *Periodic solution of a periodic delay predator-prey system* [J]. Proc Amer Math Soc, 1999, 127: 1331-1335.

[14] LI Y. *On a periodic neutral delay Lotka-Volterra system* [J]. Nonlinear Anal, 2000, 39(6): 767-778.

[15] GAINES R E, MAWHIN J L. *Coincidence degree and nonlinear differential equations*[M]. Springer, Berlin, 1977.

具有扩散的捕食系统周期解的全局存在性

叶凯莉

(信阳师范学院 数学系, 河南 信阳 464000)

摘　要: 考虑一类非自治捕食系统, 食饵种群可以在两个斑块中扩散, 捕食者种群在一个斑块中不能扩散, 利用迭合度方法, 得到了一组易验证的系统存在严格正周期解的充分条件.

关键词: 正周期解; 捕食系统; 迭合度; 扩散

中图分类号: O175.12　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1003-0972(2003)04-0382-07

(上接第 376 页)

参考文献:

[1] 林宗池. 高阶半线性常微分方程边值问题的多重边界层性质[A]. 奇摄动全国学术研讨会论文选编[C]. 宁波, 1992. 56-57.

[2] 莫嘉琪. 奇摄动问题的套层解[A]. 奇摄动全国学术研讨会论文选编[C]. 宁波, 1992. 68-70.

[3] 莫嘉琪. 一类奇摄动边值问题的套层现象[J]. 数学研究, 1995, 28(2): 48-52.

[4] 陈育森, 黄蔚章. 奇摄动非线性系统初值问题的套层解[J]. 应用数学学报, 2001, 24(1): 49-55.

[5] 陈育森, 黄蔚章. 双参数奇摄动非线性系统套层解[A]. 现代数学和力学 MMM-VIII[C]. 广州: 中山大学出版社, 2000. 446-451.

[6] 陈育森. 双参数奇摄动问题的初始层现象[J]. 漳州师范学院学报(自然科学版), 2000, 13(4): 31-37.

[7] HOWES F A. *Differential inequaities of higher order and the asymptotic solution of nonlinear boundary value problems* [J]. SIAM J MATH ANAL, 1982, 13(1): 61-79.

[8] 赵为礼. 一类三阶非线性微分方程边值问题解的存在性[J]. 数学研究与评论, 1987, 7(3): 443-449.

Singular perturbation of boundary value problem for nonlinear equation with two parameters

CHEN Yu-sen, HUANG Wei-zhang

(Fuqing Branch, Fujian Normal University, Fuqing 350300, China)

Abstract: The singular perturbation of boundary value problem for a class of higher order semilinear equation with two parameters is studied. The boundary layer phenomena of different characters of perturbed solution with different quantity step of two parameters is discussed. By using differential inequalities, existence of the solution is proved, and an estimation of remainder term is given.

Key words: semilinear; two parameter; singular perturbation; differential inequality

责任编校: 郭红建