·基础理论研究·

PS 环的一些刻画

魏俊潮

(扬州大学理学院 数学系, 江苏 扬州 225002)

摘　要: 利用非奇异模、极小内射模, 给出 PS 环的一些刻画, 同时刻画了半单环, 指出右 YJS 环、右 DS 环与右 PS 环之间的关系及它们等价的条件.

关键词: PS 环; 极小右理想; 极小内射模; 非奇异模.

中图分类号: O153.3　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1003-0972(2002)04-0377-03

0　引言

近年来, 关于内射模的研究很多[1,2,3], 利用内射模, 刻画了环性质. 文献[1]中引入极小内射模, 刻画极小内射环, 本文利用极小内射模刻画 PS 环. 本文中, R 表示有单位元的结合环, M 表示左 R-模.

根据[2], 一个环 R 称为右(左) PS 环, 如果 R 的每个极小右(左)理想都是投射模. 易见, 右(左) PP 环, 右(左)非奇异环都是右(左) PS 环.

根据[4], 一个环 R 称为右(左) DS 环, 如果 R 的每个极小右(左)理想都是直和项. 易见, 右(左) DS 环是右(左) PS 环.

根据[3], 一个环 R 称为右(左) YJS 环, 如果 R 的每个极小右(左)理想都是 YJ 内射模. 由[3]定理 2 知右(左) YJS 环是右(左) PS 环.

根据[1], 一个环 R 称为右(左)极小内射环, 如果对 R 的每个极小右(左)理想 kR (Rk) 及右(左) R—同态 $\gamma: kR\ (Rk)\to R$, 有 $\gamma(k)\in kR\ (Rk)$. 由[4]知右(左) DS 环是右(左)极小内射环.

设 $R=\begin{pmatrix} F & F \\ O & F\end{pmatrix}$, F 是一个除环, 则 R 是左和右非奇异环, 从而是左和右 PS 环, 但 R 既不是左极小内射环又不是右极小内射环, 从而 R 也不是左 DS 环和右 DS 环.

一个右 R-模 M 称为极小内射模, 若对 R 的每个极小右理想 K 及每个 R-同态 $f: K\to M$, 可以扩充到 R 到 M 的同态.

一个右 R-模 M 称为右极小非奇异模, 若 R 的每个极小右理想 K 都是非奇异模.

1　主要结果

定理 1　设 R 是一个环, 则下列条件等价:

1) R 是右 PS 环;

2) $\mathrm{Soc}(R_R)\cap Z(R_R)=0$;

3) 投射右 R-模的每个极小子模是投射模;

4) R 的每个零化子极大右理想 K 由幂等元生成;

5) 对每个单右 R-模 M, 或者 M 是非奇异模, 或者 $\mathrm{Hom}_R(M, R)=0$;

6) 对 R 的每个极大右理想 L, 或者 $l(L)=0$, 或者 R/L 是非奇异模.

7) $\mathrm{Soc}(R_R)$ 是非奇异模;

8) R 的每个极小右理想是非奇异模;

9) R 有一个忠实的右极小非奇异模.

证明　1)⇒2): 设 kR 是 R 的任意极小右理想, 则 kR 投射, $r(k)$ 是 R 的直和项, 故 $k\notin Z(R_R)$, 从而 $\mathrm{Soc}(R_R)\cap Z(R_R)=0$;

2)⇒1) 设 kR 是 R 的任意极小右理想, 由 2) $k\notin Z(R_R)$, 则 $r(k)$ 非本质, 又 $r(k)$ 极大, 故 $r(k)$ 是 R 的直和项, 又 $kR\cong R/r(k)$, 从而 kR 投射.

3)⇒1)⇒8)⇒7)⇒5)⇒1)⇔4): 显然.

1)⇒3): 设 M 是投射右 R-模 P 的极小子模, 则 M 是某个自由模 F 的极小子模, 易证 $M\cong I$, 其中 I 是 R 的极小右理想, 由 1) M 是投射右 R-模.

收稿日期: 2001-11-23
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19971073)
作者简介: 魏俊潮(1967-), 男, 江苏兴华人, 扬州大学理学院副教授, 硕士, 从事代数学研究.

5) ⇒ 6) 设 L 是 R 的任意极大右理想, 如果 $l(L)\neq 0$, 由于 $l(L)\cong \mathrm{Hom}_R(R/L, R)$, 由 5) R/L 是非奇异模(因为 R/L 是单右 R-模);

6) ⇒ 1) 设 kR 是 R 的任意极小右理想, 则 $r(k)$ 极大, 又 $k\in lr(k)$, 由 6) $R/r(k)$ 是非奇异模, 则 $r(k)$ 非本质, 故 $r(k)$ 是 R 的直和项, 又 $kR\cong R/r(k)$, 从而 kR 投射 .

1) ⇒ 9): R_R 是忠实右极小非奇异模 .

9) ⇒ 6): 设 M_R 是忠实右极小非奇异模, K 是 R 的极大右理想, 若 $l(K)\neq 0$, 设 $T = l(K)$, 则 $TK = 0$, 但 $TR\neq 0$, 故 $MTR\neq 0$, 设 $0\neq m\in MT$, 使 $mR\neq 0$, 由于 $mK\subseteq MTK = 0$, 故 $K\subseteq l(m)\subset R$, $K = l(m)$, 因此 $mR\cong R/K$, mR 是 M 的极小子模, mR 是非奇异模, R/K 是非奇异模 .　证毕

推论 2　设 R 为右 PS 环, $\mathrm{Soc}(R_R)$ 是 R 的本质右理想, 则 R 是右非奇异环 .

由于左完全环拥有本质右基座, 故有:

推论 3　设 R 为右 PS 环, 左完全环, 则 R 是右非奇异环 .

一个环 R 称为右 GPF 环, 如果 R_R YJ-内射, 半完全, 且拥有本质右基座 .

推论 4　R 是半单环当且仅当 R 为右 PS 环, 右 GPF 环 .

证明　设 R 为右 PS 环和右 GPF 环, 由推论 2 知 R 是右非奇异环 . 又 R_R 是 YJ-内射模, $J(R) = Z(R_R) = 0$. 因为 R 是半完全环, $R/J(R)$ 是半单环, 从而 R 是半单环 .　证毕

由于右 PF 环是右 GPF 环, 故有

推论 5　R 是半单环当且仅当 R 为右 PS 环, 右 PF 环 .

在文献[4]中, 我们指出 R 是右 DS 环当且仅当 $\mathrm{Soc}(R_R)\cap J(R_R) = 0$; 又 R_R 是 YJ-内射模时, $J(R) = Z(R_R)$. 故有:

推论 6　设 R_R 是 YJ-内射模, 则 R 是右 DS 环当且仅当 R 为右 PS 环 .

定理 7　设 R 是一个环, 则下列条件等价:

1) R 是右 PS 环;

2) 极小内射右 R-模的每个商模是极小内射模;

3) 内射右 R-模的每个商模是极小内射模;

4) 每个右 R-模的任意两个极小内射子模的和是极小内射模;

5) 每个右 R-模的任意两个同构的极小内射子模的和是极小内射模 .

证明　仿[5]定理 4 可证 2) ⇒ 4) ⇒ 5) ⇒ 2):

1) ⇒ 2) 设 Q^8 是极小内射右 R-模 Q 的任意商模. $f: Q\to Q^8$. $g: kR\to Q^8$ 是任意右 R-同态, 其中 kR 是极小右理想 . 由 1) kR 是投射模, 则有右 R-模映射 $h: kR\to Q$, 使 $fh = g$. 又 Q 是极小内射右 R-模, 则有 $t: R\to Q$, 使 $ti = h$, 其中 $i: kR\to R$ 是嵌入映射 . 故有 $ft: R\to Q^8$, 使 $(ft)i = f(ti) = fh = g$. 故 Q^8 是极小内射模 .

2) ⇒ 3) 显然;

3) ⇒ 1) 设 kR 是 R 的任意极小右理想, $f: Q\to Q^8$ 是任意右 R-满射, 其中 Q 是任意内射右 R-模, $g: kR\to Q^8$ 是任意右 R-同态, 则 Q^8 是极小内射模, 故有 $h: R\to Q^8$, 使 $hi = g$. 又 R_R 投射, 则有 $t: R\to Q$, 使 $ft = h$, 则有 $t: kR\to Q$, 使 $f(ti) = (ft)i = hi = g$. 故 kR 是投射模 .

设 S 是 R 的自由有限正规化扩张, 且 S 是双边 R-投射的, 则称 S 是 R 的 Excellent 扩张[6].　证毕

定理 8　S 是 R 的 Excellent 扩张, 则 R 是右 PS 环当且仅当 S 为右 PS 环 .

证明　由[6]推论 1.3 $\mathrm{Soc}(S_S) = \mathrm{Soc}(R_R)S$, 且作为右 R-模,

$$\mathrm{Soc}(S_S) = \mathrm{Soc}(R_R)S\cong \bigoplus_{i=1}^{n}\mathrm{Soc}(R_R).$$

故 S 是右 PS 环当且仅当 $\mathrm{Soc}(S_S)$ 为投射右 S-模当且仅当 $\mathrm{Soc}(S_S)$ 是投射右 R-模当且仅当 $\mathrm{Soc}(R_R)$ 是投射右 R-模当且仅当 R 是右 PS 环 .　证毕

注 1　定理 3 中的 Excellent 扩张不能削弱成自由有限正规化扩张, 例如: 设 $R = Z_2$, $A = Z_2[x]/(x^2)$, 则 $A = Z_2\oplus Z_2t$, $t^2 = 0$, 再设 $S = \begin{pmatrix} Z_2 & A \\ 0 & A\end{pmatrix}$, 则 R 是右 PS 环, 但 S 不是右 PS 环 . 另一方面 S 是 R 的自由有限正规化扩张, 自由基为 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&t\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&t\\0&0\end{pmatrix}$.

推论 9　设 G 是有限群, $|G|^{-1}\in R$, 则 Crossed 积 $R*G$ 是右 PS 环当且仅当 R 是右 PS 环 .

推论 10　R 是右 PS 环当且仅当全矩阵环 $M_n(R)$ 是右 PS 环 .

定理 11　设 R 是群 G-分次环, $|G|^{-1}\in R$, 则 Smash 积 $R\# G^*$ 是右 PS 环当且仅当 R 是右 PS 环 .

证明　由[7]知$R\# G^* * G \cong M_n(R)$, 再由推论 9 和推论 10 可得 .　证毕

注 2　定理 11 中的$|G|^{-1}\in R$ 不能去掉, 例如: 设$R = Z_2[x]/(x^2)$, 则$R = Z_2 \oplus Z_2 t$, $t^2 = 0$, 则R 不是右 PS 环[2]. 现设$G = \{e, a\}$是二元循环群, R 是G-分次环, $R_e = \{0, 1\}$, $R_a = \{0, 1+ a\}$, 则

$$R\# G^* \cong M_2(Z_2),$$

$$(b+ cx)p_e + (u+ vx)p_a \to \begin{pmatrix} b+c & v \\ c & u+v \end{pmatrix},$$

则由推论 10 知$R\# G^*$是右 PS 环 .

设R 是群G-分次环, 记 $\mathrm{Supp}G = \{a\in G \mid R_a \neq 0\}$, 文献[8]指出: 若$e$-次分支$R_e$ 是单Artin 环, 则$R = R_e * G$(Crossed 积). 从而

$$R\# G^* \cong M_n(R_e),$$

其中$n = |G|$.

定理 12　设R 是群G-分次环, $G = \mathrm{Supp}G$, $|G|^{-1}\in R_e$, R_e 是单Artin 环, 则下列条件等价:

1) R_e 是右非奇异环;

2) R_e 是右 PS 环;

3) Smash 积$R\# G^*$是右 PS 环;

4) R 是右 PS 环;

5) R 是右非奇异环;

6) Smash 积$R\# G^*$是右非奇异环 .

证明　1) ⇒ 2), 3) ⇔ 4) 显然; 2) ⇒ 1) 由于R_e 是单Artin 环, 从而为左完全环, 由推论 3 得证 .

2) ⇔ 3) 由于$R\# G^* \cong M_n(R_e)$, 其中 $n = |G|$, 由推论 10 知$R\# G^*$是右 PS 环当且仅当R_e 是右 PS 环 .

1) ⇔ 5) ⇔ 6) 由[9]可得 .　证毕

定理 13　设R 为右 PS 环, 若R 的每个幂等主右理想包含一个极小右理想, 且奇异单右R-模是 YJ 内射模, 则$Z_r(R) = 0$;

证明　若$Z_r(R)\neq 0$, 则有$0\neq a\in Z_r(R)$, 使$a^2 = 0$, 若$RaR + r(a) = R$, 则Ra 是幂等的, 故有极小右理想kR, $kR\subseteq aR$, 由于R 是右 PS 环, 则有f: $kR\cong eR$, 其中$e^2 = e$, $f^{-1}(e) = k$. 由于$k\in Z_r(R)$, 则有R 的本质右理想I, 使$kI = 0$, 故$eI = 0$, $e\in Z_r(R)$, 矛盾 . 故有R 的极大本质右理想M, 使$RaR + r(a)\subseteq M$. 由于R/M 是奇异单右R-模, 故为 YJ 内射模, 设$aR \to R/M$, $ar \mapsto r+ M$ 是右R-模映射, 故有$c\in R$, 使 $1- ca\in M$, $ca\in RaR\subseteq M$, $1\in M$, 矛盾 .　证毕

在文献[10]中,Ware 指出交换环上的单模是平坦模当且仅当它为内射模 .

推论 14　设R 为交换环, 则下列条件等价:

1) R 为右 PS 环;

2) R 为右 YJS 环;

3) R 为右DS 环;

4) R 的每个极小右理想p-内射模;

5) R 的每个极小右理想是 FP 内射模;

6) R 的每个极小右理想是内射模;

7) R 的每个奇异极小右理想是p-内射模;

8) R 的每个奇异极小右理想是 FP 内射模;

9) R 的每个奇异极小右理想是内射模;

10) R 的每个极小右理想是极小内射模 .

推论 15　设R_R 为 YJ 内射模, I 是R 的极小右理想, 则下列条件等价:

1) I 是 YJ 内射模;

2) I 是极小内射模;

3) I 是直和项;

4) I 是投射模;

5) I 是非奇异模 .

定理 16　设R_R 为 YJ 内射模, 则下列条件等价:

1) R 是右 YJS 环;

2) R 是右DS 环;

3) R 是右 PS 环 .

参考文献:

[1]　NICHOSON W K, YOUSIF M F. *M injective rings*[J]. J Alg, 1997, 187: 548-578.

[2]　NICHLSON W K, WATTERS J F. *Rings with projective socles*[J]. Proce Amer Math Soc, 1988, 102(3): 443-450.

[3]　魏俊潮 . YJS 环[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2001, 4(4): 7-10.

[4]　魏俊潮 . DS 环[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2001, 4(3): 1-4.

[5]　WEIM IN X. *Characterization of rings using direct projective modules and direct injective modules*[J]. J Pure App Alg, 1993, 87: 99-104.

[6]　PARMENTER M M, STEWART P N. *Excellent extensions*[J]. Comm Alg, 1988, 16(4): 703-713.

[7]　QUINN D. *Group graded rings and duality*[J]. Trans Amer Math Soc, 1985, 292: 154-167.

[8]　COHEN M, ROWEN L H. *Group graded rings*[J]. Comm in Alg, 1981, 11(3): 1253-1270.

(下转第 381 页)

又因为当 $k\le 3n-2$ 时, k 的任一个分拆式(6)都满足(3); 当 $k=3n-1$ 时, 仅有一个分拆式

$$k=3n-1=2n+1+1+\cdots+1$$

不满足(3); 当 $k=3n$ 时, 仅有两个分拆式

$$\begin{aligned}k&=3n=(2n+1)+1+1+\cdots+1\\&=2n+2+1+\cdots+1\end{aligned}$$

不满足(3). 因此 $\sum_{k=n}^{3n} f(k,n)-3\le G(p)$.

当 $k>3n-2$ 时, $k-3n+2$ 的任一个分拆式

$$k-3n+2=s_1+s_2+\cdots+s_t,\ 1\le t\le n.$$

对应着 k 的一个分拆式

$$\begin{aligned}k=&(2n-1+s_1)+(1+s_2)\\&+\cdots+(1+s_t)+1+\cdots+1.\end{aligned}$$

它不满足(3). 因此, 不满足(3)的分拆式至少有 $f(k-3n+2,1)+f(k-3n+2,2)+\cdots+f(k-3n+2,n)$ 个. 由(1)可知

$$\sum_{i=1}^{n} f(k-3n+2,i)=f(k-2n+2,n).$$

所以,

$$\sum_{k=n}^{3n} f(k,n)-3\le G(p)\le\sum_{k=n}^{3n-2} f(k,n)$$
$$+\sum_{k=3n-1}^{nn}[f(k,n)-f(k-2n+2,n)].$$

(2) 当 $p=2n+1\ge 5$ 时, 类似可证(5)式成立.

注: 当 $p=6$ 时, (4)式的上、下界皆为 20, 与文[1]的结论一致.

参考文献:

[1] 许 进. 2-重自补图论(Ⅰ)-度序列特征[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 1999, 27(4): 1-6.

[2] 柯 召, 魏万迪. 组合论[M]. 北京: 科学出版社, 1984. 297-298.

An upper and lower bounds of an open problem

QI Ying-chun, DUAN Guang-sen

(Zhoukou Teachers College, Zhoukou 466000, China)

Abstract: An upper and lower bounds of an open problem, number of p-dimensional potentially self-complementary 2-multigraph sequence, is given.

Key words: self-complementary 2-multisequence; degree sequence; number of addition partition

责任编校: 郭红建

(上接第 379 页)

[9] 魏俊潮. 非奇异环和分次非奇异环[J]. 扬州工学院学报(自然科学版), 1996, 8(3): 51-54.

[10] WARE R P. *Endomorphism rings of projective modules*[J]. Trans Amer Math Soc, 1971, 155(2): 233-256.

Some characterizations of PS ring

WEI Jun-chao

(Dept. of Math., Coll. of Sci., Yangzhou Univ., Yangzhou 225002, China)

Abstract: PS ring is characterized using nonsingular modules and minijective modules. Furthermore, semisimple rings is also characterized. At the same time, the relations among right YJS rings, right PS rings and right DS rings are obtained, and the equality conditions among them are given.

Key words: PS rings; minimal left ideals; minijective modules; nonsingular modules

责任编校: 郭红建