·基础理论研究·

具临界指数开问题的一类逼近

饶若峰*

(宜宾学院 数学系,四川 宜宾 644000)

摘 要:给出了一类具临界指数的椭圆方程一对非平凡弱解的存在性定理,在某种意义上首次逼近了具临界指数的椭圆方程的一开问题.

关键词: Sobolev临界指数;第一特征值;集中紧性原理

中图分类号: O175.25 **文献标识码**: A **文章编号**: 1003-0972(2007)02-0138-05

Approximation on the Open Problem with Critical Sobolev Exponent

RAO Ruo-feng

(Department of Mathematics, Yibin College, Yibin 644000, China)

Abstract: The existence theorem of a pair of solutions for elliptic equation with the critical Sobolev exponents is given in this paper, which approximates firstly on an open problem to some extent

Key words: critical sobolev exponent; first eigenvalue; compactness-concentraction principle

1983年 BREZIS和 NIRENBERG在文献[1]中证明了具 Sobolev临界指数 2^* 的半线性椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u, & x \in \Omega \subset R^N \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

当 $N \geq 4$ 且 $0 < \lambda < \lambda_1$ 时正解存在.而当 $N = 3$ 时,情况变得很特殊.事实上 BREZIS和 NIRENBERG后来发现,当且仅当 $N = 3$ 时 $-\Delta$ 的格林函数属于 $L^2_{loc}(R^N)$.一个直接的困难在于下确界

$$\inf_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|u\|^2 - \lambda\|u\|^2_{L^2}}{\|u\|^2_{L^{2^*}}} = S_\lambda < S,$$

在 $N = 3$ 时未必成立.事实证明这是一种本质的困难,文献[2,3]因此只给出了 $\lambda \geq \lambda_1$ 时该问题在 $N \geq 4$ 时非平凡弱解存在性结论.

本文一般假设 Ω 为 $R^N\ (N \geq 3)$ 中的有界光滑区域,Sobolev临界指数 $2^* = \frac{2N}{N-2}$,λ_1 为 $-\Delta$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的最小特征值,其范数为

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2001年刘水强和唐春雷在文献[4]中讨论了涉及 Sobolev临界指数和 λ_1 的半线性椭圆方程弱解的存在性问题.此外还有 1995年 LANDESMAN 和 RABINSON在文献[5]中用拓扑度技巧和变分方法也解决过类似问题,以及相关文献[6-9],等.受到[4][10]等相关文献的启发,本文试图考虑

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u + |u|^{2^*-2}u + g(x,u), & x \in \Omega \subset R^N\ (N \geq 3) \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

非平凡弱解的存在性问题,其中次临界扰动项 $g(x,t)$ 关于变量 t 可以是非线性的.为在形式上逼近了

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u + |u|^{2^*-2}u, & x \in \Omega \subset R^N\ (N \geq 3) \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

本文最后给出了含参数 ε 的 Dirichlet问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u + |u|^{2^*-2}u + \varepsilon f(u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

一对非平凡解的存在性定理,这里

$$f(t) = \begin{cases} -t^p, & t \in (-1, 1) \\ -t^q, & t \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases} \tag{4}$$

是奇函数(如,p, q 分别等于两既约奇数之商),其中常数 $p \in (0,1)$,$q \in (1, 2^*-1)$.

收稿日期: 2006-04-04; **修订日期**: 2006-10-26; *.**通讯联系人**, E-mail: rrf2@163.com
基金项目:国家自然科学基金项目(10071048);宜宾学院青年基金项目(2006Q01)
作者简介:饶若峰(1969-),男,江西抚州人,讲师,硕士,主要从事偏微分方程研究.

1 开问题正解的不存在性

定理 1 Dirichlet问题 (2) 没有古典正解.

证明 首先由文献[11,12]知,第一特征值 $\lambda_1 > 0$,其对应的第一特征函数空间 $E(\lambda_1)$ 是一维的,并且第一特征函数在 Ω 上均保持不变号,从而可设存在范数为 1的正特征函数 $e_1 \in E(\lambda_1)$,对任意 $x \in \Omega$ 有 $e_1(x) > 0$.

假设问题 (2) 存在古典正解,不妨设为 u_0,则由 (2),对于特征函数 e_1 显然有

$$\int_\Omega u^{2^*-1} e_1 \mathrm{d}x = 0. \tag{5}$$

由 e_1 的连续性知,对于任意给定测度不为零的 $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ (即 $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$),必存在 $x_0 \in \overline{\Omega_0}$,使 $0 < u_0^{2^*-1}(x_0)e_1(x_0) = \min_{x\in\overline{\Omega_0}} u_0^{2^*-1}(x)e_1(x)$,从而

$$\int_\Omega u^{2^*-1} e_1 \mathrm{d}x \geq \int_{\overline{\Omega_0}} u_0^{2^*-1} e_1 \mathrm{d}x \geq u_0^{2^*-1}(x_0)e_1(x_0) \cdot \mathrm{meas}\,\Omega_0 > 0,$$

与式 (5) 矛盾,故问题 (2) 没有古典正解. 证毕

注 1 由文献[13]定理 7.5.4知,只要 Ω 为 R^N 中的 $C^{0,\alpha}$ 区域 (定义 3.1),问题 (2) 的弱解也就是强解,故此时问题 (2) 也就没有任何正解.

注 2 e_1 的连续性可由文献[13]引理 5.9.1和定理 5.9.3推得.

2 非平凡多解存在性与正则性

本文假设 $g(x,t)$ 满足下列条件

(g_1) $g(x,t) \in C(\overline{\Omega} \times R, R)$,

(g_2) 存在常数 $q \in (1, 2^*-1)$,使得 $\lim_{t\to+\infty} \frac{g(x,t)}{t^q} = \beta < 0$ 对 $x \in \overline{\Omega}$ 一致地成立,

(g_3) $\lim_{t\to 0+} \frac{g(x,t)}{t} = -\infty$ 对 $x \in \overline{\Omega}$ 一致地成立.

又记

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega u \mathrm{d}x - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} \mathrm{d}x - \int_\Omega G(x,u)\mathrm{d}x$$

显然 $I(u)$ 为问题 (1) 所对应的变分泛函,其中 $G(x,u) = \int_0^u g(x,t)\mathrm{d}t$

定理 2 满足条件 (g_1) - (g_3) 的函数 $g(x,t)$ 关于变元 t 是奇函数,且对任意 $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,+\infty)$ 有 $g(x,t) < 0$. 如果存在函数 $v \in H_0^1(\Omega)$, $v(x) \neq 0$, a. e $x \in \Omega$,使得

$$\sup_{t\geq 0} I(tv) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}, \tag{6}$$

则 Dirichlet问题 (1) 至少存在一对非平凡弱解.这里

$$0 < S = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} \mathrm{d}x\right)^{2/2^*}}$$

为 Sobolev嵌入 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ 最佳常数,与 Ω 的选择无关.

不妨仍设 e_1 为 λ_1 所对应的某正的特征函数,其范数 $\|e_1\| = 1$. 由引理 5,存在常数 $t_0 > 0$,使得

$$I(t_0 e_1) = \max_{t\geq 0} I(te_1). \tag{7}$$

从而,对于具体的复合函数 $G(x, t_0 e_1(x))$,有

推论 1 满足条件 (g_1) - (g_3) 的函数 $g(x,t)$ 关于变元 t 是奇函数,且对任意 $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,+\infty)$ 有 $g(x,t) < 0$. 如果对于满足式 (7) 的常数 $t_0 > 0$,有

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} G(x, t_0 e_1(x)) > -\frac{1}{\mathrm{meas}\,\Omega}\left\{\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + \frac{t_0^{2^*}}{2^*}\|e_1\|_{L^{2^*}}^{2^*}\right\}, \tag{8}$$

则定理 2中的式 (7) 成立.

注 3 推论 1中的 e_1 实际上考虑换成任意给定的第一特征函数,即 ke_1 $(k \neq 0)$,因为实际上对任意 ke_1,都会有相应的 t_0,使相应的式 (7) 成立. 本文将之固定,纯粹是为了叙述简便.

3 定理 2与推论 1的证明

引理 1 变分泛函 $I(u)$ 满足山路几何.

证明 首先易证 $I \in C^1(H_0^1(\Omega), R)$,且 $I(0) = 0$.

其次存在常数 $\rho > 0$ 及 $\alpha_0 > 0$,使得:

$$I(u)\,|\,\partial B_\rho(0) \geq \alpha_0 > 0. \tag{9}$$

这里记 $B_\rho(0) = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\| < \rho\}$.

类似于文献[4]对 $H_0^1(\Omega)$ 进行正交分解,

$$H_0^1(\Omega) = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_1)^\perp = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \cdots E(\lambda_i) \oplus \cdots$$

其中 $E(\lambda_1)^\perp = E(\lambda_2) \oplus E(\lambda_3) \oplus \cdots E(\lambda_i) \oplus \cdots$, λ_i 为算子 $-\Delta$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中第 i 个互不相等的特征值,其对应的特征函数空间记为 $E(\lambda_i)$. 从而对于任意 $u \in H_0^1(\Omega)$,存在 $\bar{u} \in E(\lambda_1)$, $u \in E(\lambda_1)^\perp$,使得 $u = \bar{u} + u$,且有

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \bar{u}|^2 \mathrm{d}x = \lambda_1 \int_\Omega \bar{u}^2 \mathrm{d}x, \\ \int_\Omega |\nabla \tilde{u}|^2 \mathrm{d}x = \lambda_2 \int_\Omega \tilde{u}^2 \mathrm{d}x, \end{cases} \tag{10}$$

由式(10)及 Sobolev不等式,有:存在常数 $c_* > 0$

$$I(u) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) \|\tilde{u}\|^2 - c_* \|u\|^{2^*} - \int_\Omega G(x, u)\mathrm{d}x \tag{11}$$

由有限维空间 $E(\lambda_1)$的范数等价性,存在常数 $c > 0$

$$\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \geq c\|u\|^2, \forall u \in E(\lambda_1).$$

再由式(11)以及(g_1) - (g_3)不难得到:存在常数 $c^* > 0$使得

$$I(u) \geq c^* \|u\|^2 - c_* \|u\|^{2^*},$$

故当 $\|u\| = \rho$充分小时,易知式(9)成立.

再次,对于任意给定的 $u_1 \in H_0^1(\Omega)$且 $u_1(x) \neq 0$, a e $x \in \Omega$(本文约定,可简记 $u_1 \neq 0$),必存在 $t_1 > 0$,使得 $t_1 u_1 \notin B_\rho(0)$并且当 $t \geq t_1$时有 $I(tu_1) < 0$. 这只需证以下式(12)成立

$$I(tu_1) \to -\infty, t \to +\infty, \forall u_1 \neq 0 \tag{12}$$

事实上由(g_2)以及连续函数 $g(x, t)$关于 t的奇性则不难证得式(12)成立.

记 Γ是 $H_0^1(\Omega)$中连结 0和 $t_1 u_1$的连续路径的全体. 又记

$$c_0 = \inf_{\zeta \in \Gamma} \max_{u \in \zeta} I(u) \geq \alpha_0 > 0.$$

由引理 1以及不含(PS)条件的山路引理知,存在 $H_0^1(\Omega)$中的序列$\{u_n\}$,使得:当 $n \to \infty$时,

$$I(u_n) \to c_0, \tag{13}$$

$$I'(u_n) \to 0, in (H_0^1(\Omega))^* \tag{14}$$

证毕

引理 2 满足式(13)和(14)的序列$\{u_n\}$在 $H_0^1(\Omega)$中有界.

证明 由式(13)和(14)知:当 n充分大时,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega u_n^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x - \int_\Omega G(x, u_n)\mathrm{d}x = c_0 + o(1), \tag{15}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \lambda_1 \int_\Omega u_n^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x - \int_\Omega g(x, u_n) u_n \mathrm{d}x = \langle I'(u_n), u_n \rangle. \tag{16}$$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,当 n充分大时,

$$\|I'(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))^*} \leq \varepsilon. \tag{17}$$

由(g_2),并注意到 ε的任意性,可以得到

$$|G(x, u)| + \frac{1}{s}|g(x, u)u| \leq \varepsilon |u|^{2^*} + s_\varepsilon, \quad \forall (x, u) \in \bar{\Omega} \times R. \tag{18}$$

则由式(15) - (18)不难得到:存在正的常数 s_1和 s_2使

$$s_2 \|u_n\|^2 - s_1 \cdot meas\Omega < c_0 + o(1) + \frac{\varepsilon}{s}\|u_n\| + s_\varepsilon \cdot meas\Omega$$

至此易知$\{u_n\}$在 $H_0^1(\Omega)$中有界.

从而满足式(13)和(14)的序列$\{u_n\}$在 $H_0^1(\Omega)$中必存在弱收敛的子列,不妨仍记为$\{u_n\}$(以下遇此情况,均此处理,不再赘述),

$$u_n \rightharpoonup u_*, in H_0^1(\Omega). \tag{19}$$

再利用 Carathedory算子 $A: u(x) \to \tau(x, u(x))$是 $L^{2^*}(\Omega) \to L^{(2^*)'}(\Omega) = (L^{2^*}(\Omega))^*$的有界连续算子(其中 $\tau(x, u) = \lambda_1 u + |u|^{2^*-2}u + g(x, u)$),则不难证得. 证毕

引理 3 式(19)中的 u_*即是问题(1)在 $H_0^1(\Omega)$中的一解.

接下来,由于

$$u_n \rightharpoonup u_*, in H_0^1(\Omega)$$

$$u_n \rightharpoonup u_*, in L^{2^*}(\Omega)$$

$$u_n \to u_*, in L^2(\Omega)$$

$$u_n(x) \to u_*(x), a e x \in \Omega$$

把 u_n和 u_*零延拓到 R^N上,为方便起见,仍记为 u_n和 u_*,不失一般性,可以假定存在两非负测度 μ和 υ,使 $n \to \infty$时,

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \mu, \quad |u_n|^{2^*} \rightharpoonup \upsilon$$

由 LIONS的集中紧性原理[14],存在至多可数指标集 J,和$\{x_j\}_{j \in J} \subset R^N$, $\{\mu_j\}_{j \in J} \subset (0, +\infty)$,使得

(i) $v = |u_*|^{2^*} + \sum_{j \in J} v_j \delta_{x_j}$,

(ii) $\mu \geq |\nabla u_*|^2 + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$,

且 $v_j^{2/2^*} \leq \mu_j / S$, $\forall j \in J$. 其中 δ_{x_j}是 x_j处的 Dirac测度, S是 Sobolev嵌入最佳常数.

现取截断函数 $\phi \in C_0^\infty(R^N)$, $0 \leq \phi \leq 1$,且 ϕ在 $B_{\frac{1}{2}}(0)$上恒为 1, $supp\phi \subset B_1(0)$,又记 $\phi_\varepsilon = \phi(\frac{x}{\varepsilon})$, $x \in R^N$, $\varepsilon > 0$. 则由 Hölder不等式不难得到一技术性结果:

$$\int_{R^N} |u(x)\nabla\phi_\varepsilon(x - x_j)|^2 \mathrm{d}x \leq$$

$$(\int_{R^N} |\nabla\phi|^{\frac{2 \cdot 2^*}{2^*-2}} \mathrm{d}x)^{\frac{2^*-2}{2^*}}$$

$$(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u|^{2^*}dx)^{\frac{2}{2^*}},$$
$$\forall x_j \in R^N, u \in L^{2^*}(R^N)$$

利用这个技术性结果,类似于文献[10],本文也可证得:J至多是有限指标集(包括空集),即:

引理4 对于引理3中的u_*,必有$c_0 = I(u_*)$或存在正整数m使得$c_0 = I(u_*) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m} v_j$,且$v_j \geq S^{\frac{N}{2}}$, $\forall j \in J$.

定理2的证明 由引理1至引理3,定理2的证明只须证明引理3中的u_*是问题(1)的非平凡弱解.而这只需利用引理4,用反证法即可证明.再由$g(x,t)$的奇函数性,显然$-u_*$,也是Dirichlet问题(1)的一非平凡弱解.

引理5 存在$t_0 > 0$使式(7)成立.

证明 在式(18)中,由u_1的任意性,不妨取$u_1 = e_1$,则由式(9)和(18)以及$I(0) = 0$,显然存在$t_0 > 0$,使得

$$0 < I(t_0 e_1) = \max_{t\geq 0} I(te_1) = \sup_{t\geq 0} I(te_1) \quad (20)$$

证毕

推论1的证明 结合引理5以及连续函数的复合函数$G(x, t_0 e_1(x))$在$\overline{\Omega}$上的连续性,则不难证得推论1.

4 推论1的适用实例与定理3

广泛地存在着满足推论1中条件的函数$g(x,t)$,且$g(x,t)$可以是关于t的非线性项.例如:令

$$g(x,t) = \varepsilon f(t) = \begin{cases} -\varepsilon t^p, & t \in (-1,1) \\ -\varepsilon t^q, & t \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty). \end{cases}$$

其中$f(t)$为式(4)定义的奇函数,常数$p \in (0,1)$, $q \in (1, 2^* - 1)$.从而

$$G(x,u) = \begin{cases} -\frac{1}{p+1}\varepsilon u^{p+1}, & u \in (-1,1) \\ -\frac{1}{q+1}\varepsilon u^{q+1} - (\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1})\varepsilon, & u \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty). \end{cases}$$

关于变量u是偶函数.

复合连续函数$G(x, t_0 e_1(x))$在$\overline{\Omega}$上的解析式为

$$G(x, t_0 e_1(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{p+1}\varepsilon\{t_0 e_1(x)\}^{p+1}, & t_0 e_1(x) \in (-1,1) \\ -\frac{1}{q+1}\varepsilon\{t_0 e_1(x)\}^{q+1} - (\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1})\varepsilon, & t_0 e_1(x) \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty). \end{cases} \quad (21)$$

不难验证$g(x,t) = \varepsilon f(t)$满足推论1中所有条件,并且当$\varepsilon$取充分小正数时,$G(x, t_0 e_1(x))$也必满足式(8).下面分两种情况来证明这个断言.

当$\varepsilon \to 0+$时,如果正数t_0在一有界范围内变动,注意到连续函数$e_1(x)$在$\overline{\Omega}$上有界,则当ε取充分小正数时,由式(21)显然有

$$G(x, t_0 e_1(x)) > -\frac{1}{meas\Omega}\cdot\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} > -\frac{1}{meas\Omega}\{\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + \frac{t_0^{2^*}}{2^*}\|e_1\|_{L^{2^*}}^{2^*}\}, \forall x \in \overline{\Omega}$$

若当$\varepsilon \to 0+$时,如果正数t_0在一无界范围内变动,则$\{t_0\}$必是若干有界子集与若干满足以下式(22)的无界子集(不妨仍设为$\{t_0\}$)之并,

$$t_0 \to +\infty, \text{当 } \varepsilon \to 0+\text{时}. \quad (22)$$

于是实际上只需考虑式(22)这种情况.

这样,当ε为充分小正数时,t_0为充分大正数,从而由式(21)有

$$\frac{1}{t_0^{2^*}}G(x, t_0 e_1(x)) > -\frac{1}{meas\Omega}\cdot\frac{1}{2^*}\|e_1\|_{L^{2^*}}^{2^*} > -\frac{1}{meas\Omega}\{\frac{1}{N}\frac{1}{t_0^{2^*}}S^{\frac{N}{2}} + \frac{1}{2^*}\|e_1\|_{L^{2^*}}^{2^*}\}, \forall x \in \overline{\Omega}$$

因而对于式(4)定义的$f(t)$,由推论1,本文有

定理3 当ε取充分小的正数时,Dirichlet问题(3)至少存在一对非平凡弱解$\pm u_\varepsilon$.

参考文献:

[1] BREZIS H, NIRENBERG L. *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations involving Criticial Sobolev Exponents*[J]. Comm Pure Appl Math (S0010-3640), 1983, 36: 437-477.

[2] CAPOZZIA, FORTUNATO D, PALMIERI G. *An Existence Result for Nonlinear Elliptic Problems involving Critical Sobolev Exponent*[J]. Ann Inst H Poincare (S0246-0203), 1985 (2): 463-470.

[3] AMBROSETTI A, STRUWE M. *A Note on The Problem* $-\Delta u = \lambda u + u|u|^{2^*-2}$ [J]. Manusc Math (S0240-2963), 1986, 54: 373-379.

[4] LIU Shui-qiang, TANG Chun-lei. *Existence and Multiplicity of Solutions for a Class of Semilinear Elliptic Equations*[J]. J Math Anal Appl(S0022-247X), 2001, 257: 321-331.
[5] LANDESMAN E, ROBINSON S, RUMBOS A. *Mulitiple Solutions of Semilinear Elliptic Problems at Resonance*[J]. Nonlinear Anal(S0362-546X), 1995, 24: 1049-1059.
[6] CAPOZZIA, LUPO D, SOLIMINIS. *On the Existence of a Nontrivial Solution to Nonlinear Problems at Resonance*[J]. Nonlinear Anal(S0362-546X), 1989, 13: 151-163.
[7] LANDESMAN E, LAZER A. *Nonlinear Perturbation of Linear Elliptic Boundary Value Problems at Resonance*[J]. J Math Mech(S1173-9126), 1970, 19: 609-623.
[8] IANNACCI R, NKASHAMA M N. *Nonlinear Two Point Boundary Value Problem at Resonance without Landesman-Lazer Condition*[J]. Proc Amer Math Soc(S0002-9939), 1989, 10: 943-952.
[9] TANG Chun-lei. *Solvability for Two-point Boundary Value Problems*[J]. J Math Anal Appl(S0022-247X), 1997, 216: 368-374.
[10] 朱熹平. 临界增长拟线性椭圆型方程的非平凡解[J]. 中国科学(A辑), 1988(3): 225-237.
[11] LINDQVIST P. *On the Equation* $div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda|u|^{p-2}u=0$[J]. Proc Amer Math Soc(S0002-9939), 1990, 109: 159-164.
[12] ANANE A. *Simplicite et Isolation de la Premiere Valeur Propre du p-Laplacian Avec Poids*[J]. C R Hebd Seanc Acad Sci: Paris ser I Math(S1557-7023), 1987, 305: 725-728.
[13] 陆文端. 微分方程中的变分方法[M]. 成都:四川大学出版社, 1995.
[14] LIONS P L. *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations*[J]. Revista Math Ibero: The limit case(I)(S0213-2230), 1985(1): 145-201.

责任编辑:任长江

(上接第 137页)

[2] MAGNUSSON K G. *Destabilizing Effect of Cannibalism on a Structured Predatorprey System*[J]. Math Biosci(S0025-5564), 1999, 155: 61-75.
[3] WANG W, CHEN L. *A Predator-prey System with Stage Structure for Predator*[J]. Computers Math Applic(S0898-1221), 1994, 33(8): 81-91.
[4] AIELLO W G, FREEDMAN H I. *A Time-delay Model of Single-species Growth with Stage Structure*[J]. Math Biosci(S0025-5564), 1990, 101: 139-153.
[5] AIELLO W G, FREEDMAN H I, WU J. *Analysis of Model Representing Stagestructured Population Growth with State-dependent Time Delay*[J]. SIAM J Appl Math(S0036-1399), 1992, 52(3): 866-869.
[6] HE X Z. *The Lyapunov Functionals for Delay Lotka-Volterra Type Models*[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics(S0036-1399), 1998, 58(4): 1222-1236.
[7] HALE J K, WALTMAN P. *Persistence in Infinite-dimensional Systems*[J]. SIAM J Math Anal(S0036-1410), 1989, 20: 388-396.
[8] WALTER W. *Ordinary Differential Equations Graduate Texts in Mathematics*[M]. New York: Springer, 1998.
[9] KUANG Y. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*[M]. London: Academic Press, 2004.
[10] CHEN L S, SONG X Y, LU Z Y. *Mathematica Models and Methods in Ecology*[M]. Chengdu: Science Press(in Chinese), 2003.

责任编辑:任长江