

· 基础理论研究 ·

关于 Diophantine 方程 $x^p - 2^p = pDy^2$

乐茂华

(湛江师范学院 数学系, 广东 湛江 524048)

摘要: 设 p 是奇素数, D 是无平方因子正整数. 本文证明了: 当 $p > 3$ 时, 如果 D 不能被 p 或 $2kp + 1$ 之形素数整除, 则方程 $x^p - 2^p = pDy^2$ 没有适合 $\gcd(x, y) = 1$ 的正整数解 (x, y) .

关键词: 高次 Diophantine 方程; 正整数解; 存在性

中图分类号: O 156

文献标识码: A

文章编号: 1003-0972(2004)01-0004-02

设 N 是全体正整数的集合. 设 p 是奇素数, D 是不能被 p 或 $2kp + 1$ 之形素数整除的无平方因子正整数, 柯召和孙琦^[1]曾经对 $p = 3$ 的情况讨论了方程

$$x^p - 2^p = pDy^2, x, y \in N, x > 2, \gcd(x, y) = 1 \quad (1)$$

本文完整地解决了该方程 $p > 3$ 时的求解问题, 即证明了:

定理 当 $p > 3$ 时, 方程(1)无解

证明 假如方程(1)有解 (x, y) , 则因 $\gcd(x, y) = 1$ 且 D 无平方因子, 故从(1)可知 D, x 和 y 都是奇数. 根据文献[2]中的结果, 从(1)可知

$$\gcd\left(x - 2, \frac{x^p - 2^p}{x - 2}\right) = p \quad (2)$$

$$\frac{x^p - 2^p}{x - 2} \not\equiv 0 \pmod{p^2} \quad (3)$$

由于 $(x^p - 2^p)/(x - 2)$ 除了 p 以外的素因数都是 $2kp + 1$ 之形, 故从(1)、(2)、(3)可得

$$\begin{cases} x - 2 = Dp^2 a^2, \frac{x^p - 2^p}{x - 2} = pb^2, \\ y = pab, a, b \in N. \end{cases} \quad (4)$$

对于正整数 n , 设

$$E(n) = \frac{x^n - 2^n}{x - 2} = x^{n-1} + 2x^{n-2} + \dots + 2^{n-1} \quad (5)$$

因为 x 是奇数, $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$, 所以当 $n \equiv 3 \pmod{4}$ 时, 从

(5)可知 $E(n)$ 是适合

$$E(n) \begin{cases} 3 \pmod{8}, & \text{当 } x \equiv 3 \pmod{4} \text{ 时,} \\ 7 \pmod{8}, & \text{当 } x \equiv 1 \pmod{4} \text{ 时,} \end{cases} \quad (6)$$

的正奇数, 此时, 从(4)中第二个等式可得

$$E(p) = pb^2 \quad (7)$$

由于 b 也是奇数, 故从(6)和(7)可知

$$p \begin{cases} 3 \pmod{8}, & \text{当 } x \equiv 3 \pmod{4} \text{ 时,} \\ 7 \pmod{8}, & \text{当 } x \equiv 1 \pmod{4} \text{ 时.} \end{cases} \quad (8)$$

设 $(\frac{*}{*})$ 是 Jacobi 符号. 当 $p \equiv 7 \pmod{8}$ 时, 从(8)可知 $x + 2$ 是适合 $x + 2 \equiv 3 \pmod{4}$ 的正奇数. 因为从(5)可知

$$E(p) \equiv 2^{p-1} \pmod{x+2} \quad (9)$$

其中 $p - 1$ 是偶数, 故从(9)可得

$$\left(\frac{E(p)}{x+2}\right) = \left(\frac{2^{p-1}}{x+2}\right) = 1 \quad (10)$$

从(7)和(10)可知

$$\left(\frac{E(p)}{x+2}\right) = \left(\frac{pb^2}{x+2}\right) = \left(\frac{-p}{x+2}\right) = 1 \quad (11)$$

由于从(4)中第一个等式可知

$$x + 2 \equiv 4 \pmod{p},$$

故从(11)可得

$$1 = \left(\frac{-p}{x+2}\right) = - \left(\frac{x+2}{p}\right) = - \left(\frac{4}{p}\right) = -1 \quad (12)$$

这一矛盾.

当 $p \equiv 3 \pmod{8}$ 且 $p > 3$ 时, 设 $t = (p - 1)/2$

收稿日期: 2003-04-20

基金项目: 国家自然科学基金项目(10271104); 广东省自然科学基金项目(011781); 广东省教育厅自然科学研究项目(0161); 湛江市 988 科技兴湛计划项目

作者简介: 乐茂华(1952-), 男, 上海人, 湛江师范学院数学系教授, 主要从事数论研究.

此时 t 是适合 $t \equiv 1 \pmod{4}$ 的正奇数. 从(5)可知

$$E(p) \equiv 2^{p-1} \pmod{E(t)} \quad (13)$$

故有

$$\left(\frac{E(p)}{E(t)} \right) = \left(\frac{2^{p-1}}{E(t)} \right) = 1 \quad (14)$$

从(7)和(14)可得

$$\left(\frac{E(p)}{E(t)} \right) = \left(\frac{pb^2}{E(t)} \right) = \left(\frac{-p}{E(t)} \right) = 1 \quad (15)$$

因为从(4)中的第一个等式可知

$$E(t) \equiv 2^{(p-3)/2} \left(\frac{p-1}{2} \right) \equiv 2^{(p-5)/2} \pmod{p} \quad (16)$$

其中 $(p-5)/2$ 是正奇数, 因此从(15)和(16)可得

$$1 = \left(\frac{-p}{E(t)} \right) = - \left(\frac{E(t)}{p} \right) = - \left(\frac{-2^{(p-5)/2}}{p} \right) = - \left(\frac{-2}{p} \right) = \left(\frac{2}{p} \right) = -1 \quad (17)$$

这一矛盾.

综上所述可知: 当 $p > 3$ 时, 方程(1)无解.

证毕

参考文献:

- [1] 柯 召, 孙 琦. 关于丢番图方程 $x^3 \pm 8 = 3Dy^2$ [J]. 四川大学学报(自然科学版), 1981, 18(4): 1-5.
 [2] N K E R I K. Untersuchungen über die Fermatsche Vermutung [J]. Annales Acad Sci Fennicae Ser A I, 1946, 33: 60

On the Diophantine equation $x^p - 2^p = pDy^2$

LE Mao-hua

(Department of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang 524048, China)

Abstract Let p be an odd prime, and let D be a positive integer with square free. It is proved that if $p > 3$ and D is not divisible by p or primes of the form $2kp + 1$, then the equation $x^p - 2^p = pDy^2$ has no positive integer solutions (x, y) with $\gcd(x, y) = 1$.

Key words: higher Diophantine equation; positive integer solution; existence

责任编辑: 郭红建

《河南科技》征稿启事

《河南科技》杂志是由河南省科学技术厅主管, 面向全国公开发行的综合性、权威性科技期刊. 创刊 20 多年来, 深入实施“科教兴豫”战略, 积极发挥自身优势, 已成为河南省科技界一个重要的科技宣传阵地. 目前, 本刊陆续被《中国学术期刊综合评价数据库》《中文科技期刊数据库》《中国核心期刊(遴选)数据库》《中国学术期刊(光盘版)》《中国期刊网》《河南省科技信息网》《河南科普网》收录, 成为其来源期刊. 荣获河南省优秀科技期刊一等奖期刊.

本刊开设的主要栏目有: 知识河南、科技广场、科技论坛、管理创新、专利战略、科学前沿等, 主要发表科学学、科技政策、发展战略、科技创新、科技与经济协调发展、学科综述、技术研究等方面的理论与应用的学术论文、调查报告等.

本刊热忱欢迎广大院校科技工作者积极踊跃地投稿, 使自己的研究成果得以广泛的交流和传播.

征稿要求如下:

来稿要求观点明确, 论据充足, 论述简练, 资料数据反映的情况务求核实准确.

1. 稿件请用 Email 投稿(推荐)或邮寄投稿, 如果文章中有附图, 请提供 jpg 或 tif 格式的图像文件.

2. 论文书写要点如下:

1) 来稿须包括: 题名, 作者署名, 作者单位, 作者简介(性别、学

历、职称、职务、研究领域与方向)及所在地与邮政编码, 联系方式(电话/手机、传真、Email), 文章摘要、关键词、正文、参考文献等.

2) 来稿应论点明确、叙述精炼、条理清晰、深入浅出, 以利非本学科的读者阅读. 篇幅最好不要超过 5000 字.

3) 摘要应简明扼要地概括正文中的主要信息. 采用第三人称的写法, 不用“本文”、“作者”等作主语.

4) 稿件中引用论点、公式、图、表均需注明参考文献(按文中出现顺序编码, 在右上角用小方括号标出). 正文后则按编码次序依本刊要求的编排格式列出相应的参考文献.

5) 图、表务求精、简、规范, 以配合文字阐明观点. 公式务求精约, 杜绝公式推导过程.

6) 请勿一稿多投.

3. 稿件请寄到: 郑州市政六街 3 号《河南科技》杂志社(收)

联系人: 胡 弘

邮 编: 450003

电 话: (0371) 5998844 5954220

传 真: (0371) 5954220

电子邮箱: hnkjpublic@371.net

《河南科技》杂志社

二 三年十月