

DOI: 10.3969/j.issn.1003-0972.2012.04.006

一类偶数阶中立型方程的振动准则

高春霞^{a*} 鲍俊艳^b

(河北大学 a. 电子信息工程学院; b. 数学与计算机学院 河北 保定 071002)

摘 要: 通过引入 H -积分算子, 对一类具有连续分布偏差变元的偶数阶中立型方程解的振动性问题进行了研究, 并给出了方程解振动的判别准则.

关键词: 中立型方程; 振动性; 分布偏差变元

中图分类号: O175.8 文献标志码: A 文章编号: 1003-0972(2012)04-0442-04

Oscillation Criteria for a Class of Even Order Neutral Equations

GAO Chun-xia^{a*}, BAO Jun-yan^b

(a. College of Electronic and Information Engineering; b. College of Mathematics and Computer Science, Hebei University, Baoding 071002, China)

Abstract: A class of even order neutral equations with distributed deviating arguments was investigated by introducing H -integral operators. Several new criteria that ensure the oscillation of solutions were obtained.

Key words: neutral equations; oscillation; distributed deviating arguments

0 引言

近年来, 关于中立型方程解的振动性研究已有一些结果. 例如, 文献[1-2] 讨论了具有连续偏差变元的二阶中立型方程的振动性问题, 文献[3-6] 给出了高阶中立型方程的振动准则, 但是文献[3-5] 主要讨论了具有离散偏差变元方程的情形. 由于具有连续偏差变元模型在理论和实际中的重要作用, 它已被应用到很多微分方程中, 参见文献[6-10]. 本文主要考虑下列具有连续分布偏差变元的偶数阶中立型方程

$$\left(x(t) + \int_a^b p(t, \eta) x(h(t, \eta)) d\rho(\eta) \right)^{(n)} + \int_c^d q(t, \xi) x(g(t, \xi)) d\sigma(\xi) = 0, t \geq t_0 \quad (1)$$

的振动性问题, 并给出解的振动性定理.

1 预备知识

假设方程(1) 满足下列条件:

- 1) n 是一个偶数;
- 2) $p(t, \eta) \in C([t_0, \infty) \times [a, b], \mathbf{R}^+)$, $q(t, \xi) \in C([t_0, \infty) \times [c, d], \mathbf{R}^+)$, $\mathbf{R} = [0, \infty)$;
- 3) $h(t, \eta) \in C([t_0, \infty) \times [a, b], \mathbf{R})$, $h(t, \eta) \leq t$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\eta \in [a, b]} h(t, \eta) = \infty;$$

$$4) g(t, \xi) \in C([t_0, \infty) \times [c, d], \mathbf{R}), \lim_{t \rightarrow \infty} \min_{\xi \in [c, d]} g(t, \xi) = \infty; g(t, \xi) \text{ 关于 } t \text{ 和 } \xi \text{ 非减而且 } g(t, \xi) \leq t, \xi \in [c, d], \frac{d}{dt}g(t, \xi) \text{ 存在且 } g'(t, \xi) > 0;$$

5) $\rho(\eta) \in C([a, b], \mathbf{R})$ 和 $\sigma(\xi) \in C([c, d], \mathbf{R})$ 是非减函数, 而且方程(1) 中的积分是 Stieltjes 积分.

文中总是假定对于任意的 $t_0 \geq 0$, 方程(1) 的解存在.

定义 1 假设 $x(t)$ 为方程(1) 的解, 若存在充分大的正数 $t_1 \geq t_0$, 使得当 $t \geq t_1$ 时 $x(t) > 0$ 恒成立, 则称 $x(t)$ 最终为正. 若存在充分大的正数 $t_1 \geq t_0$, 使得当 $t \geq t_1$ 时 $x(t) < 0$ 恒成立, 则称 $x(t)$ 最终为负.

定义 2 若方程(1) 的解 $x(t)$ 的零点集合无上界, 则称 $x(t)$ 为振动的. 否则称其为非振动的. 若方程(1) 的所有解都是振动的, 则称方程(1) 振动.

定义 3 称函数 $H = H(t, s)$ 属于函数类 E , 记为 $H \in E$, 如果 $H \in C(D, \mathbf{R}^+)$ 满足下列两个条件:

- 1) $H(t, t) = 0$, $H(t, s) > 0, t > s$;
- 2) H 在 D 上关于变量 t, s 具有连续偏导数, 而且存在 $h_1(t, s), h_2(t, s) \in C(D, \mathbf{R})$, 使得

收稿日期: 2012-04-19; 修订日期: 2012-06-18; * 通讯联系人, E-mail: chunxia-gao@163.com

基金项目: 河北省自然科学基金资助项目(A2009000151); 河北省教育厅科学技术研究计划资助项目(Z2010120)

作者简介: 高春霞(1978-), 女, 河北徐水人, 讲师, 主要从事微分方程研究.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = h_1(t, s) H(t, s), \quad \frac{\partial H}{\partial s} = h_2(t, s) H(t, s),$$

其中 $D = \{(t, s) : -\infty < s \leq t < \infty\}$.

定义4 称函数 $H = H(t, s)$ 属于函数类 E_1 , 记为 $H \in E_1$, 如果 $H \in C(D, \mathbf{R}^+)$ 满足下列两个条件:

1) $H(t, t) = 0, H(t, s) > 0, t > s$;

2) H 在 D 上关于变量 s 具有连续偏导数 $H'_s(t, s) \leq 0$, 而且存在 $h_3(t, s) \in C(D, \mathbf{R})$, 使得

$$\frac{\partial H}{\partial s} = h_3(t, s) H(t, s).$$

令 $z \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 对于 $t \geq T \geq t_0$ 定义两个 H -积分算子

$$X_{T, t}^H = \int_T^t H(s, t) z(s) ds, \quad Y_{T, t}^H = \int_T^t H(t, s) z(s) ds. \quad (2)$$

下面给出定理证明中需要用到两个重要引理.

引理1^[11] 设 $u(t)$ 是 $\mathbf{R}^+$ 上的一个正的且 n 次可微的函数. 如果 $u^{(n)}(t)$ 定号而且在任意区间 $[t_1, +\infty)$ 上不恒等于零, 其中 $t_1 > 0$, 则存在 $t_u \geq t_1$ 以及指标 $l (0 \leq l \leq n)$, 当 $t \geq t_u$ 时,

$$u(t) u^{(k)}(t) > 0, 0 \leq k \leq l;$$

$$(-1)^{k-l} u(t) u^{(k)}(t) > 0, l \leq k \leq n,$$

其中 $n+l$ 为偶数时 $u(t) u^{(n)}(t) \geq 0$, $n+l$ 为奇数时, $u(t) u^{(n)}(t) \leq 0$.

引理2^[12] 假设引理1的条件成立, 而且当 $t \geq t_u$ 时, $u^{(n-1)}(t) u^{(n)}(t) \leq 0$, 则存在常数 $\theta \in (0, 1)$, 使得对于充分大的 t , 存在常数 $M_\theta > 0$ 不等式

$$|u'(t/2)| \geq M_\theta t^{n-2} |u^{(n-1)}(t)|$$

成立.

2 主要结论

为了得到振动性结果, 首先给出下列引理.

引理3 设 $H \in E$, 若 $x(t)$ 是方程(1)在 $(m, r]$ 上的最终正解, 则存在函数 $z(t) \in C([t_0, \infty), \mathbf{R})$, 使得对于任意的 $H \in E$,

$$X_{m, r}^H \left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_1^2(s, m)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho) g'(s, \rho)} \right) \leq -z(r) H(r, m), \quad (3)$$

其中

$$Q(t) = \int_c^t q(t, \xi) (1 - P(g(t, \xi))) d\sigma(\xi),$$

$$P(t) = \int_a^b p(t, \eta) d\rho(\eta).$$

证明 设 $x(t)$ 为方程(1)的一个最终正解, 则存在充分大的正数 $t_1 \geq t_0$, 使得当 $t \geq t_1$ 时 $x(t) > 0$ 恒成立. 又因为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\eta \in [a, b]} h(t, \eta) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \min_{\xi \in [c, d]} g(t, \xi) = \infty,$$

所以存在 $t_2 \geq t_0$, 使得 $x(t) > 0, x(h(t, \eta)) > 0, x(g(t, \xi)) > 0, t \geq t_2, \eta \in [a, b], \xi \in [c, d]$. 令

$$y(t) = x(t) + \int_a^b p(t, \eta) x(h(t, \eta)) d\rho(\eta), \quad t \geq t_2, \quad (4)$$

得

$$y^{(n)}(t) + \int_c^d q(t, \xi) x(g(t, \xi)) d\sigma(\xi) = 0, \quad t \geq t_2, \quad (5)$$

从而当 $t \geq t_0$ 时 $y(t) \geq x(t) > 0, y^{(n)}(t) \leq 0$, 而且 $y^{(n)}(t)$ 最终不为零. 因此, 根据引理1, 存在 $t_3 \geq t_2$ 及奇数 $l (0 < l < n)$, 使得当 $t \geq t_3$ 时,

$$y^{(k)}(t) > 0, 0 \leq k \leq l;$$

$$(-1)^{k-l} y^{(k)}(t) > 0, l \leq k \leq n.$$

分别取 $k=1$ 和 $k=n-1$, 得

$$y'(t) > 0, \quad y^{(n-1)}(t) > 0, \quad t \geq t_3. \quad (6)$$

根据方程(1)的假设条件3) $y(t) \geq x(t)$ 以及式(6), 得 $y(t) \geq y(h(t, \eta)) \geq x(h(t, \eta))$. 再结合式(4), 得

$$x(t) \geq y(t) - \int_a^b p(t, \eta) y(t) d\rho(\eta) = (1 - P(t)) y(t). \quad (7)$$

由方程(1), 得

$$y^{(n)}(t) + \int_c^d q(t, \xi) (1 - P(g(t, \xi))) y(g(t, \xi)) d\sigma(\xi) \leq 0. \quad (8)$$

因为 $g(t, \xi)$ 关于 ξ 非减, 所以

$$y^{(n)}(t) + y(g(t, \rho)/2) \int_c^d q(t, \xi) (1 - P(g(t, \xi))) d\sigma(\xi) \leq 0, \quad t \geq t_3. \quad (9)$$

令

$$z(t) = \frac{y^{(n-1)}(t)}{y(g(t, \rho)/2)}, \quad (10)$$

则 $z(t) \geq 0$. 因为 $y'(g(t, \rho)) = \frac{dy}{dg} \frac{dg}{dt} g'(t, \rho)$, $g'(t, \xi)$ 关于 ξ 非减, 而且 $g(t, \xi) \leq t, y^{(n)}(t) \leq 0$, 所以,

$$y^{(n-1)}(t) \leq y^{(n-1)}(g(t, \rho)) \leq y^{(n-1)}(g(t, \rho)/2).$$

因此, 由引理2可知, 当 $t \geq t_3$ 时,

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{y^{(n)}(t)}{y(g(t, \rho)/2)} - \frac{y^{(n-1)}(t) y'(g(t, \rho)/2) g'(t, \rho)}{2y^2(g(t, \rho)/2)} \leq \\ &= \frac{y^{(n)}(t)}{y(g(t, \rho)/2)} - \frac{y^{(n-1)}(t) M_\theta g^{n-2}(t, \rho) y^{(n-1)}(g(t, \rho)/2) g'(t, \rho)}{2y^2(g(t, \rho)/2)} \leq \\ &= \frac{y^{(n)}(t)}{y(g(t, \rho)/2)} - \frac{1}{2} M_\theta g^{(n-2)}(t, \rho) g'(t, \rho) z^2(t). \end{aligned}$$

进一步, 由式(9), 得

$$z'(t) \leq - \int_c^d q(t, \xi) (1 - P(g(t, \xi))) d\sigma(\xi) - \frac{1}{2} M_\theta g^{n-2}(t, \rho) g'(t, \rho) z^2(t),$$

即

$$Q(t) \leq -z'(t) - \frac{1}{2} M_\theta g^{n-2}(t, \rho) g'(t, \rho) z^2(t). \quad (11)$$

利用算子 $X_{t, r}^H$ 及定义3中的条件2), 得

$$\begin{aligned} X_{t, r}^H(Q) &\leq - \int_t^r H(s, t) z'(s) ds - \\ &= \frac{M_\theta}{2} \int_t^r H(s, t) g^{n-2}(s, \rho) g'(s, \rho) z^2(s) ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -z(r)H(r, t) + \int_r^t H(s, t)h_1(s, t)z(s)ds - \\
& \frac{M_\theta}{2} \int_r^t H(s, t)g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)z^2(s)ds = \\
& -z(r)H(r, t) + X_{t,r}^H(h_1(s, t)z(s) - \\
& \frac{M_\theta}{2}g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)z^2(s)) = \\
& -z(r)H(r, t) - \\
& X_{t,r}^H\left(\frac{M_\theta}{2}g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)(z(s) - \right. \\
& \left. \frac{h_1(s, t)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)})^2\right) + \\
& \frac{1}{2}X_{t,r}^H\left(\frac{h_1^2(s, t)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\right), \quad (12)
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
X_{t,r}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_1^2(s, t)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\right) \leq \\
-z(r)H(r, t) \quad t \geq t_3, \quad (13)
\end{aligned}$$

令 $t \rightarrow m^+$ 得式(3)成立, 引理 3 证毕.

引理 4 设 $H \in E$ 若 $x(t)$ 是方程(1)在 $[r, n]$ 上的最终正解, 则存在 $z(t) \in C([t_0, \infty), \mathbf{R})$, 使得对于任意的 $H \in E$,

$$\begin{aligned}
Y_{r,n}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_2^2(s, m)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\right) \leq \\
-z(r)H(n, r), \quad (14)
\end{aligned}$$

其中 $A(s)$ 同引理 3.

证明 设 $x(t)$ 为方程(1)的最终正解, 如引理 3 的证明所述, 当 $t \geq t_3$ 时, 式(11)成立, 从而得

$$\begin{aligned}
Y_{r,t}^H(Q) & \leq - \int_r^t H(t, s)z'(s)ds - \\
& \frac{M_\theta}{2} \int_r^t H(t, s)g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)z^2(s)ds = \\
& z(r)H(t, r) + \int_r^t H(t, s)h_2(t, s)z(s)ds - \\
& \frac{M_\theta}{2} \int_r^t H(t, s)g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)z^2(s)ds = \\
& z(r)H(t, r) - Y_{r,t}^H(-h_2(t, s)z(s) + \\
& \frac{M_\theta}{2}g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)z^2(s)) = \\
& z(r)H(t, r) - Y_{r,t}^H\left(\frac{M_\theta}{2}g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)(z(s) - \right. \\
& \left. \frac{h_2(t, s)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)})^2\right) + \\
& \frac{1}{2}Y_{r,t}^H\left(\frac{h_2^2(t, s)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\right), \quad (15)
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
Y_{r,t}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_2^2(t, s)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\right) \leq \\
z(r)H(t, r) \quad t \geq t_3, \quad (16)
\end{aligned}$$

令 $t \rightarrow n^-$ 得式(14)成立, 引理 4 证毕.

下面讨论偶数阶中立型微分方程(1)的振动性结果.

• 444 •

定理 1 设 $H \in E$ 若对于任意的 $l \geq t_0$ 不等式

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} X_{l,t}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_1^2(s, m)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\right) > 0 \quad (17)$$

和

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} Y_{l,t}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_2^2(n, s)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\right) > 0 \quad (18)$$

成立, 则方程(1)振动.

证明 设 $x(t)$ 为方程(1)的一个非振动解, $x(t) \neq 0$, 不妨设 $x(t)$ 是方程(1)的最终正解. 对于任意的 $T \geq t_0$, 令 $m = T$ 在式(17)中取 $l = m$, 则存在 $r > m$ 使得

$$X_{m,r}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_1^2(s, m)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\right) > 0. \quad (19)$$

同理, 在式(18)中取 $l = r$, 则存在 $n > r$ 使得

$$Y_{r,n}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_2^2(s, m)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\right) > 0. \quad (20)$$

联立式(19)和式(20)得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{H(r, m)}X_{m,r}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_1^2(s, m)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\right) + \\
& \frac{1}{H(n, r)}Y_{r,n}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_2^2(s, m)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\right) > 0. \quad (21)
\end{aligned}$$

另一方面, 由式(3)和式(14)得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{H(r, m)}X_{m,r}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_1^2(s, m)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\right) + \\
& \frac{1}{H(n, r)}Y_{r,n}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_2^2(s, m)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\right) \leq 0. \quad (22)
\end{aligned}$$

与不等式(21)矛盾, 所以方程(1)振动. 定理证毕

在函数类 E 中, 若选取

$$H(t, s) = (t-s)^n \quad t \geq s \geq t_0,$$

其中 $n > 1$ 是常数, 则

$$h_1 = n(t-s)^{n-1} \quad h_2 = -n(t-s)^{n-1},$$

从而由定理 1 可以得到以下推论.

推论 1 设 $l \geq t_0$, $n > 1$ 为常数, 若不等式

$$\begin{aligned}
& \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_l^t (s-l)^n(Q(s) - \\
& \frac{1}{2M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\left(\frac{n}{t-s}\right)^2)ds > 0 \quad (23)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
& \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_l^t (t-s)^n(Q(s) - \\
& \frac{1}{2M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}\left(\frac{n}{t-s}\right)^2)ds > 0 \quad (24)
\end{aligned}$$

成立, 则方程(1)振动.

定理 2 设 $H \in E_1$ 若对于任意的 $t \geq t_0$ 不等式

$$\begin{aligned}
& \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)}Y_{t_0,t}^H(Q(s) - \\
& \frac{1}{2} \frac{h_3^2(s, m)}{M_\theta g^{n-2}(s, \rho)g'(s, \rho)}) = +\infty \quad (25)
\end{aligned}$$

成立, 则方程(1)振动.

证明 设 $x(t)$ 为方程(1)的一个非振动解,而且 $x(t) \neq 0$ 不妨设 $x(t)$ 是方程(1)的最终正解.如引理3的讨论,当 $t \geq t_3$ 时,式(11)成立.对不等式(11)作用算子 $Y_{t_3}^H$,并利用定义4中的条件2)得

$$\begin{aligned} Y_{t_3}^H(Q) &\leq - \int_{t_3}^t H(t,s) z'(s) ds - \\ &\frac{M_\theta}{2} \int_{t_3}^t H(t,s) g^{n-2}(s,\rho) g'(s,\rho) z^2(s) ds = \\ &z(T) H(t,T) - Y_{t_3}^H(h_3(t,s) z(s) + \\ &\frac{M_\theta}{2} g^{n-2}(s,\rho) g'(s,\rho) z^2(s)) = \\ &- z(T) H(t,T) - \\ &Y_{t_3}^H\left(\frac{M_\theta}{2} g^{n-2}(s,\rho) g'(s,\rho) (z(s) + \right. \\ &\left. \frac{h_3(t,s)}{M_\theta g^{n-2}(s,\rho) g'(s,\rho)})^2\right) + \\ &\frac{1}{2} Y_{t_3}^H\left(\frac{h_3^2(s,m)}{M_\theta g^{n-2}(s,\rho) g'(s,\rho)}\right), \end{aligned} \quad (26)$$

从而

$$\begin{aligned} Y_{t_3}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_3^2(s,m)}{M_\theta g^{n-2}(s,\rho) g'(s,\rho)}\right) &\leq \\ z(T) H(t,T) \quad t \geq t_3. \end{aligned} \quad (27)$$

由于 $H'(t,s) \leq 0$, 所以 $H(t,t_3) \leq H(t,t_0)$, 从而

$$\begin{aligned} Y_{t_3}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_3^2(t,s)}{M_\theta g^{n-2}(s,\rho) g'(s,\rho)}\right) &\leq \\ z(t_3) H(t,t_3) &\leq H(t,t_0) z(t_3). \end{aligned}$$

于是得

$$Y_{t_0}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_3^2(t,s)}{M_\theta g^{n-2}(s,\rho) g'(s,\rho)}\right) =$$

$$\begin{aligned} &Y_{t_0}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_3^2(t,s)}{M_\theta g^{n-2}(s,\rho) g'(s,\rho)}\right) + \\ &Y_{t_3}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_3^2(t,s)}{M_\theta g^{n-2}(s,\rho) g'(s,\rho)}\right) \leq \\ &Y_{t_0}^H(Q(s)) + H(t,t_0) z(t_3) \leq \\ &H(t,t_0) \left(\int_{t_0}^{t_3} Q(s) ds + z(t_3)\right) \quad t \geq t_3, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{H(t,t_0)} Y_{t_0}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_3^2(t,s)}{M_\theta g^{n-2}(s,\rho) g'(s,\rho)}\right) &\leq \\ \int_{t_0}^{t_3} Q(s) ds + z(t_3). \end{aligned}$$

进一步得

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} Y_{t_0}^H\left(Q(s) - \frac{1}{2} \frac{h_3^2(n,s)}{M_\theta g^{n-2}(s,\rho) g'(s,\rho)}\right) &\leq \\ \int_{t_0}^{t_3} Q(s) ds + z(t_3) = M < \infty, \end{aligned} \quad (28)$$

其中 M 是一个常数. 式(28)与式(25)矛盾, 所以方程(1)振动. 定理2证毕.

推论2 对于任意的 $l \geq t_0$ 及常数 $n > 1$ 若不等式

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} Y_{t_0}^H(Q(s)) = +\infty, \quad (29)$$

和

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} Y_{t_0}^H\left(\frac{h_3^2(n,s)}{g^{n-2}(s,\rho) g'(s,\rho)}\right) < \infty, \quad (30)$$

成立, 则方程(1)振动.

参考文献:

- [1] Wang P G, Yu Y H. Oscillation of second order neutral equations with deviating arguments[J]. Math J Toyama Univ, 1998, 21: 55-66.
- [2] 高春霞, 王淑艳, 马红艳. 一类二阶中立型方程解的振动准则[J]. 河北大学学报: 自然科学版, 2011, 31(2): 118-121.
- [3] Das P, Nayak S K. Oscillatory and asymptotic behaviour of solutions of higher order neutral differential equations[J]. J Indian Math Soc, 1996, 62(1): 259-273.
- [4] Wang P G. Oscillations of n th-order neutral equation with continuous distributed deviating arguments[J]. Ann Diff Eqs, 1998, 14(3): 570-575.
- [5] Agarwal R P, Grace S R, Regan D O. Oscillation criteria for certain n th order differential equations with deviating arguments[J]. J Math Anal Appl, 2001, 262: 601-622.
- [6] 王培光, 蔡海, 王亚宁. 一类带强迫项二阶微分方程的区间振动准则[J]. 河北大学学报: 自然科学版, 2010, 30(1): 1-4.
- [7] 师文英, 赵新生, 戴晓东. 具有连续偏差变元的二阶阻尼方程的振动定理[J]. 河北大学学报: 自然科学版, 2007, 27(4): 340-344.
- [8] 王培光, 武盟. 一类具有连续变量的二阶非线性阻尼差分方程的振动准则[J]. 高校应用数学学报, 2006, 21(1): 44-48.
- [9] Wang P G, Caccetta L. Oscillation criteria for boundary value problems of high-order partial functional differential equations[J]. J Comput Appl Math, 2007, 206(1): 567-577.
- [10] 王培光, 唐楠, 高春霞. 一类具有连续偏差变元的二阶半线性微分方程的振动准则[J]. 河北大学学报: 自然科学版, 2005, 25(6): 574-579.
- [11] Kiguradze I T. On the oscillation of solutions of the equation $d^m u/dt^m + a(t) |u|^{n-1} \operatorname{sgn} u = 0$ [J]. Mat Sb, 1964, 65: 172-187.
- [12] Philos Ch G. A new criterion for the oscillatory and asymptotic behavior of delay differential equations[J]. Bull Acad Pol Sci Ser Sci Mat, 1981, 39: 61-64.

责任编辑: 郭红建