DOI: 10.3969/j.issn.1003-0972.2010.04.004

一类 KdV 方程的精确解

王艳红[1*], 王世勋[2]

(1. 河南理工大学 数学系, 河南 焦作 454000; 2. 华中科技大学 数学系, 湖北 武汉 430000)

摘 要: 利用变分法, 通过引入函数变换将偏微分方程转化为常微分方程求解, 简洁地求得了 KdV 方程与广义 KdV 方程新的精确解析解. 同时利用对方程直接积分的方法构造了广义 KdV 方程新的精确解析解.

关键词: KdV 方程; 广义 KdV 方程; 精确解; 变分法; 直接积分法

中图分类号: O175.2　　文献标志码: A　　文章编号: 1003-0972(2010)04-0492-03

Exact Solutions for a Class of KdV Equation

WANG Yan-hong[1*], WANG Shi-xun[2]

(1. School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China;
2. Department of Mathematics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430000, China)

Abstract: With the variational method, the PDE is transformed to ODE, by introducing the function transformation, then the KdV equation and generalized KdV equation are solved and some new exact solutions are obtained. Meanwhile the exact solution for generalized KdV equation is constructed by using the integral method.

Key words: KdV equation; generalized KdV equation; exact solution; variational method; integral method

0 引言

众所周知, KdV 方程现已成为数学物理的基本方程之一. 1895年 Korteweg和 de Vries[1]在讨论无黏滞不可压缩液体表面波动力学时引入此方程, 随后在物理学与工程学的许多问题中, 相继都引出 KdV 方程:

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

修改 KdV 方程的非线性项, 从而得到广义 KdV 方程:

$$u_t + u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0, \tag{2}$$

其中 β为常数.

关于 KdV 方程的研究也十分活跃. 文献 [2] 对其进行了定性分析, 文献 [3-4] 找到了 KdV 方程的一类显式精确解. 本文利用变分法与直接积分法构造方程 (1)-(2) 的几个新的精确解.

1 KdV 方程新的精确解 ——变分法

引进函数变换

$$u(x, t) = \varphi(\xi), \ \xi = x - ct + \xi_0, \tag{3}$$

其中: c为行波传播速度, ξ_0 为任意常数, 则由 (1) 及 (3) 式得

$$-c\varphi' + \varphi\varphi' + \alpha\varphi''' = 0, \tag{4}$$

对 (4) 式积分得

$$-c\varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 + \alpha\varphi'' = A, \tag{5}$$

其中 A 为积分常数. 对上式两端同乘以 φ', 并积分得

$$-\frac{c}{2}\varphi^2 + \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{2}\alpha(\varphi')^2 = A\varphi + B, \tag{6}$$

其中 B 为积分常数.

如果

$$A = B = 0, \tag{7}$$

则 (6) 可化为

$$(\varphi')^2 = \frac{1}{3\alpha}(3c\varphi^2 - \varphi^3), \tag{8}$$

构造变分

$$J = \int_{-\infty}^{0} \left[(\varphi')^2 + \frac{1}{3\alpha}(3c\varphi^2 - \varphi^3) \right] d\xi, \tag{9}$$

设

$$\varphi(\xi) = p\,\mathrm{sech}^2(q\xi), \tag{10}$$

收稿日期: 2009-12-17; 修订日期: 2010-05-31; *. 通讯联系人, E-mail: wangyh81@hpu.edu.cn

基金项目: 河南省高校科技创新人才支持计划 (2009-HASTIT-007); 河南理工大学青年基金资助项目 (Q2009-31)

作者简介: 王艳红 (1981-), 女, 河南巩义人, 讲师, 硕士研究生, 从事偏微分方程研究.

其中 p, q 为待定系数. 这样, 由 (9) 和 (10) 式得

$$J = 2\left(\frac{4}{15}p^2 q + \frac{cp^2}{3\alpha q} - \frac{4p^3}{45\alpha q}\right). \qquad (11)$$

令

$$\frac{\partial J}{\partial p} = \frac{4}{15}pq + \frac{cp}{3\alpha q} - \frac{2p^2}{15\alpha q} = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial q} = \frac{4p^2}{15} - \frac{cp^2}{3\alpha q^2} + \frac{4p^3}{45\alpha q^2} = 0 \qquad (12)$$

由此即得

$$p = 3c,\ q = \pm\sqrt{\frac{c}{4\alpha}}, \qquad (13)$$

其中 c 与 α 同号, 即

$$\varphi(\xi) = 3c\,\mathrm{sech}^2\left[\pm\sqrt{\frac{c}{4\alpha}}\xi\right]. \qquad (14)$$

定理 1 在假设 (7) 之下, 当 c 与 α 同号时, 方程 (1) 具有如下精确解:

$$u(x, t) = 3c\,\mathrm{sech}^2\left[\pm\sqrt{\frac{c}{4\alpha}}(x - ct + \xi_0)\right]. \qquad (15)$$

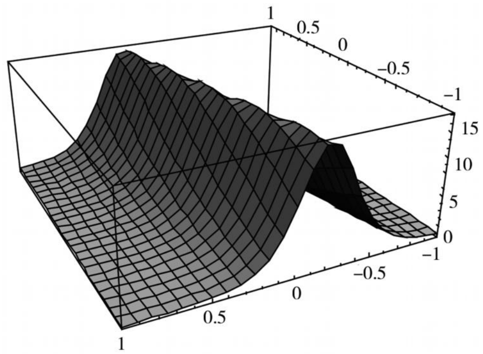

图 1 当 $c = 5$, $\alpha = 2$ 时 (15) 的波形图

Fig 1 The graph of the wave shape when $c = 5$, $\alpha = 2$ in (15)

2 广义 KdV 方程新的精确解 ——直接积分法

由 (2) 及 (3) 式得

$$-c\varphi' + \varphi^2\varphi' + \alpha\varphi''' = 0 \qquad (16)$$

对 (16) 式积分得

$$-c\varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \alpha\varphi'' = A, \qquad (17)$$

其中 A 为积分常数. 对上式两端同乘以 φ', 并积分得

$$-\frac{c}{2}\varphi^2 + \frac{1}{12}\varphi^4 + \frac{\alpha}{2}(\varphi')^2 = A\varphi + B, \qquad (18)$$

其中 B 为积分常数. 假设

$$\alpha < 0,\ A = B = 0, \qquad (19)$$

则 (19) 式可化为

$$\varphi' = \sqrt{-\frac{1}{6\alpha}}\sqrt{\varphi^4 - 6c\varphi^2}, \qquad (20)$$

如果

$$\varphi > 0,\ c > 0, \qquad (21)$$

则 (19) 式可化为

$$\frac{d\varphi}{|\varphi|\sqrt{\varphi^2 - 6c}} = \sqrt{-\frac{1}{6\alpha}}d\xi, \qquad (22)$$

积分上式, 即得如下精确解

$$\varphi(\xi) = \frac{\sqrt{6c}}{\cos\left[\sqrt{\frac{c}{-\alpha}}(\xi + \xi_0)\right]}. \qquad (23)$$

如果

$$\varphi < 0,\ c > 0, \qquad (24)$$

即得类似于 (23) 的精确解

$$\varphi(\xi) = \frac{\sqrt{6c}}{\cos\left[-\sqrt{\frac{c}{-\alpha}}(\xi + \xi_0)\right]}. \qquad (25)$$

定理 2 在假设 (19) 之下, 当 $c > 0$ 时, 方程 (2) 具有如下精确解:

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{6c}}{\cos\left[\pm\sqrt{\frac{c}{-\alpha}}(x - ct + \xi_0)\right]}. \qquad (26)$$

当 $c < 0$ 时, 方程 (2) 具有如下精确解:

$$\varphi(\xi) = \frac{\sqrt{6c}}{\cos\left[-\sqrt{\frac{c}{-\alpha}}(\xi + \xi_0)\right]}. \qquad (27)$$

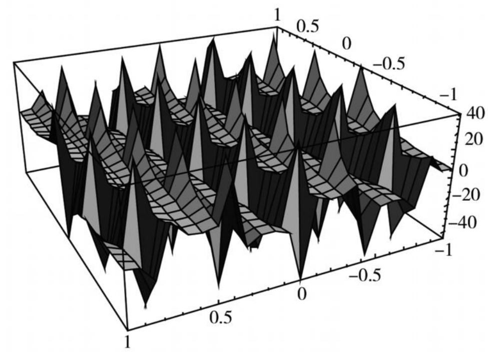

图 2 当 $c = 5$, $\alpha = -2$, $\xi_0 = 0$ 时 (26) 的波形图

Fig 2 The graph of the wave shape when $c = 5$, $\alpha = -2$, $\xi_0 = 0$ in (26)

3 广义 KdV 方程新的精确解 ——变分法

如果

$$A = B = 0, \qquad (28)$$

则 (20) 式可化为

$$(\varphi')^2 = -\frac{1}{6\alpha}(\varphi^4 - 6c\varphi^2). \tag{29}$$

构造变分

$$J = \int_0^{+\infty}\left[(\varphi')^2 - \frac{1}{6\alpha}(\varphi^4 - 6c\varphi^2)\right]d\xi \tag{30}$$

设

$$\varphi(\xi) = p\,\mathrm{sech}^2(q\xi), \tag{31}$$

其中 p, q为待定系数. 这样, 由(30)和(31)式得

$$J = \frac{2p^2(35c - 4p^2 + 28q^2\alpha)}{105q\alpha}. \tag{32}$$

令

$$\frac{\partial J}{\partial p} = 35c - 8p^2 + 28q^2\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial q} = -35c + 4p^2 + 28q^2\alpha = 0 \tag{33}$$

由此, 即得

$$p = \pm\sqrt{\frac{35c}{6}},\ q = \pm\sqrt{\frac{5c}{12\alpha}},\ c > 0,\ \alpha > 0, \tag{34}$$

即

$$\varphi(\xi) = \pm\sqrt{\frac{35c}{6}}\mathrm{sech}^2\left[\pm\sqrt{\frac{5c}{12\alpha}}\xi\right]. \tag{35}$$

定理 3　在假设(28)之下, 当 $c > 0$, $\alpha > 0$时, 方程(2)有如下精确解:

$$u(x, t) = \pm\sqrt{\frac{35c}{6}}\mathrm{sech}^2\left[\pm\sqrt{\frac{5c}{12\alpha}}(x - ct)\right]. \tag{36}$$

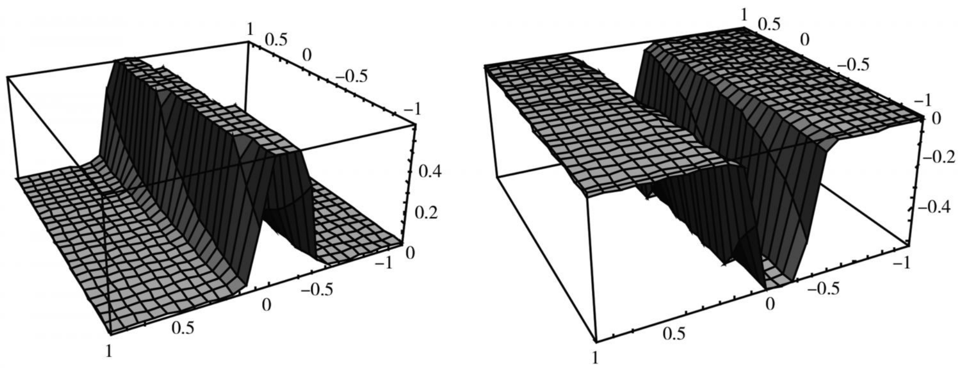

图 3　当 $c = 11$, $\alpha = 3$时(36)的波形图

Fig 3 The graph of the wave shape when $c = 11$, $\alpha = 3$ in (36)

3　结论

本文利用两种方法简洁地求得了 KdV方程与广义 KdV方程新的精确解析解. 其最大优点是通过变量代换, 分别将求解非线性偏微分方程的问题化为求解非线性代数方程组和求解非线性常微分方程的问题, 因而较为简洁. 本文的方法也可进一步推广并用于求解其他非线性偏微分方程, 这一工作目前正在进行中[5].

参考文献:

[1]　李志斌. 非线性数学物理方程的行波解[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 96-153.

[2]　谷超豪, 李大潜, 沈玮熙. 应用偏微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000: 161-168.

[3]　谢茂森. KdV方程的显示精确解[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2004, 27(5): 489-491.

[4]　杜先云. (2+1)维 Burgers方程的新的精确解[J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2006, 31(4): 29-31.

[5]　刘法贵, 王艳红. 浅水波方程的精确解[J]. 周口师范学院学报: 自然科学版, 2007, 24(5): 6-7.

责任编辑: 郭红建