

· 基础理论研究 ·

求解多目标运输问题的表上作业法

白国仲

(广东商学院 数学系, 广东 广州 510320)

摘 要:根据可持续发展和保护资源、环境的特殊需要,研究了多目标运输问题. 引入了这一类多目标运输问题的表格表示方法;给出了有效解、检验数向量等定义以及求解多目标运输问题的表上作业法.

关键词:可持续发展;多目标运输问题;表格表示方法;有效解;表上作业法

中图分类号:O221 **文献标识码:**A **文章编号:**1003-0972(2007)04-0403-03

The Tabular Algorithm for the Multiobjective Transportation Problem

BAI Guo-zhong

(Department of Mathematics, Guangdong University of Business Studies, Guangzhou 510320, China)

Abstract: For the especial demands of sustainable development, and the need of protecting natural resources and environment, the multiobjective transportation problem is studied. The tabular technique of the multiobjective transportation problem is introduced. The definitions of correct solution and check vector etc, and the tabular algorithm are given.

Key words: sustainable development; multiobjective transportation problem; tabular technique; efficient solution; tabular algorithm

0 引言

所谓运输问题,就是指从若干个产地往若干个销地运输某种物资,根据各产地的产量、各销地的销量和现有的交通网络,如何安排运输使总运费最少的问题^[1-3]. 基于应对突发事件的需要, HAMMER^[4-5]等提出了如何将货物尽快运抵目的地的运输问题,即时间运输问题(也称瓶颈运输问题). 近年来,又有人对传统的运输问题作了一些有意义的推广,如有容量限制的运输问题^[6-7]、变量有上界的运输问题^[8]、运费不完全确定的运输问题^[9-10]、在尽快将货物运抵目的地的前提下使总运费最少的运输问题^[11-12]、对总运输量有限制的运输问题^[13]、要求货物尽量在某一给定时间以前如数运到的运输问题^[14]等等. 这些问题一般只有一个优化指标,但是现实生活中大量的运输问题要综合考虑多个目标的优化问题. 比如,基于可持续发展和保护资源、环境的需要,要综合考虑运输工具对大气的污染、运输物资对环境的破坏、运输能耗与运力资源的利用、运输成本、运输时间、运输质量等等因素. 在现代物流系统中,我们

经常碰到这样有多个目标要求的运输问题,既多目标运输问题.

1 多目标运输问题的数学模型

多目标运输问题的数学模型可以表示为:

$$\begin{cases} \min z = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} x_{ij}, \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(2)}, \dots, \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(k)} \right)^T \\ s.t. \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (1)$$

这里: $a_i \geq 0$ 表示第 i 个产地的产量; $b_j \geq 0$ 表示第 j 个销地的销量; $c_{ij}^{(k)} \geq 0$ 表示第 k 个目标函数的费用系数; $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(k)} x_{ij}$ 可以表示总运费、总能耗、总运输时间、运输对环境所造成的破坏等.

关于多目标运输问题的研究由来已久,继 Lee 和 Moore 的工作^[15]之后, Diaz 和 Isenmann 分别给出了多目标

收稿日期: 2006-11-26; 修订日期: 2007-02-28; E-mail: baiguozhong@163.com

基金项目: 国家自然科学基金项目 (10571071)

作者简介: 白国仲 (1958-), 男, 湖北麻城人, 博士, 教授, 主要从事多目标决策研究.

运输问题的有效解及其判别方法^[16-17], 1987 年 Ringuest 等提出了两种求有效解的交互式算法^[18]. 也有人提出了求解多目标运输问题的模糊规划方法^[19]. 本文将根据可持续发展和保护资源、环境的需要, 研究多目标运输问题的有效解, 并给出简单有效的求解方法.

为了叙述方便, 以下总假设所给运输问题都是平衡问题, 即 $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. 记 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(k)} x_{ij} = f_k(x)$, 并把 $z = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x))^T$ 称为目标函数向量; 把向量 $c_{ij} = (c_{ij}^{(1)}, c_{ij}^{(2)}, \dots, c_{ij}^{(l)})^T$ 称为决策变量 x_{ij} 在目标函数中的系数向量. 多目标运输问题 (1) 也可用表 1 形式表示.

表 1 表格形式的多目标运输问题

Tab 1 Tabular multiobjective transportation problem

产地	销地				产量
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1		$c_{12}^{(1)}$			$c_{12}^{(1)}$
		$c_{12}^{(2)}$			$c_{12}^{(2)}$
		M			M
		$c_{12}^{(l)}$			$c_{12}^{(l)}$
...		...			...
A_m		$c_{m2}^{(1)}$			$c_{m2}^{(1)}$
		$c_{m2}^{(2)}$			$c_{m2}^{(2)}$
		M			M
		$c_{m2}^{(l)}$			$c_{m2}^{(l)}$
销量		b_2			b_2

2 多目标运输问题的有效解及求法

和传统运输问题一样, 多目标运输问题 (1) 含有 $m \times n$ 个决策变量、 $m+n$ 个等式约束, 约束矩阵 A 是一个 $(m+n) \times mn$ 矩阵, 其结构比较松散, 且特殊. 传统的平衡运输问题总有最优解, 而 (1) 是一个特殊的多目标规划问题. 多目标规划问题一般不存在 Pareto 强有效解^[20], 除特殊情况以外, 想找到一个使每一个目标函数都达到最优值的可行解一般来说是不可能的. 下面引入多目标运输问题有效解的定义.

定义 1 设 $x^{(0)} = (x_{11}^{(0)}, x_{12}^{(0)}, \dots, x_{1n}^{(0)}, x_{21}^{(0)}, \dots, x_{mn}^{(0)})^T$ 是多目标运输问题 (1) 的一个可行解, 如果对于 (1) 的任意可行解 x , 向量 $z(x^{(0)}) - z(x)$ 的第一个非零分量 (如果存在的话) 总不大于 0, 则称 $x^{(0)}$ 为多目标运输问题 (1) 的有效解.

根据可持续发展和保护资源、环境的特殊需要, 可将相应多目标运输问题的各个目标按轻重缓急, 加权分级. 显然, 如果把各个目标函数 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x)$ 按其重要程度由高到低重新排列, 不妨仍记为 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x)$, 则多目标运输问题 (1) 的有效解就是最优的折衷解^[18]. 为了求得这样的有效解, 我们进一步引入下面的定义.

定义 2 设 $x^{(0)}$ 是多目标运输问题 (1) 的一个基可行

解, 如果对于每一个基变量 $x_{ij}^{(0)}$, 向量

$$u_i^{(0)} = (u_{i1}^{(0)}, u_{i2}^{(0)}, \dots, u_{in}^{(0)})^T \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

$$v_j^{(0)} = (v_{j1}^{(0)}, v_{j2}^{(0)}, \dots, v_{jm}^{(0)})^T \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

满足

$$c_{ij} - u_i^{(0)} - v_j^{(0)} = 0$$

即

$$(c_{ij}^{(1)}, c_{ij}^{(2)}, \dots, c_{ij}^{(l)})^T - (u_{i1}^{(0)}, u_{i2}^{(0)}, \dots, u_{in}^{(0)})^T -$$

$$(v_{j1}^{(0)}, v_{j2}^{(0)}, \dots, v_{jm}^{(0)})^T = 0,$$

则称向量 $u_i^{(0)}, v_j^{(0)}$ 是目标函数向量 $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x))^T$ 关于基可行解 $x^{(0)}$ 的位势向量, 或简称为位势.

不难证明, 对于任意一个基可行解 $x^{(0)}$, 位势向量一定存在. 事实上, 因为约束矩阵的秩 $(A) \leq m+n-1$, 所以只要令 $u_1^{(0)}$ 等于 0 向量, 则其他位势向量便随之而定.

定义 3 设 $u_i^{(0)}, (i=1, 2, \dots, m), v_j^{(0)} (j=1, 2, \dots, n)$ 是关于基可行解 $x^{(0)}$ 的位势向量, 则把向量

$$(\sigma_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(2)}, \dots, \sigma_{ij}^{(l)})^T = (c_{ij}^{(1)}, c_{ij}^{(2)}, \dots, c_{ij}^{(l)})^T -$$

$$(u_{i1}^{(0)}, u_{i2}^{(0)}, \dots, u_{in}^{(0)})^T - (v_{j1}^{(0)}, v_{j2}^{(0)}, \dots, v_{jm}^{(0)})^T$$

称为决策变量 x_{ij} 的检验数向量, 或简称为检验数向量 σ_{ij} .

显然, 基变量的检验数向量等于 0 向量.

借鉴求解目标规划的修正单纯形法^[21], 不难证明 (对目标函数的个数 l 用数学归纳法) 下面的定理.

定理 1 设 $x^{(0)}$ 是多目标运输问题 (1) 的一个基可行解, 如果所有非基变量 $(\sigma_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(2)}, \dots, \sigma_{ij}^{(l)})^T$ 的检验数向量的第一个非 0 分量 (如果存在的话) 都不小于 0, 则 $x^{(0)}$ 是 (1) 的一个有效解.

根据求解线性目标规划的单纯形法^[21]和定理 1, 可以设计求解多目标运输问题的表上作业法, 其求解过程可以简单地归纳为:

(1) 用最小元素法 (或伏格法等) 找出 $f_1(x)$ 的一个初始基可行解 (或直接求出 $f_1(x)$ 的最优解), 并把基变量的取值写在产销平衡表 (表 1) 相应格点 (i, j) 中 $c_{ij}^{(k)} (k=1, 2, \dots, l)$ 的右边, 用 “ $[]$ ” 括起来;

(2) 计算当前基可行解的位势向量, 并分别附加在产销平衡表的右端和下端;

(3) 用位势法求出每一个目标函数的非基变量的检验数 $\sigma_{ij}^{(k)}$, 写在产销平衡表相应格点 (非基变量所对应的格点) 中 $c_{ij}^{(k)} (k=1, 2, \dots, l)$ 的右边, 前面加 “+” “-” 符号, 以示与基变量的取值之区别;

(4) 令 $k=1$, 检查所有检验数向量的第 k 个分量;

(5) 如果存在某个 $\sigma_{ij}^{(k)} < 0 (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$, 且 $\sigma_{ij}^{(s)} = 0 (s=1, 2, \dots, k-1)$, 则继续下一步; 否则, 转 (7);

(6) 从格点 (i, j) (x_{ij} 对应的格点) 开始找一条闭回路, 进行优化调整, 得到一个新的基可行解. 重新计算位势向量、检验数向量, 转 (5);

(7) 如果 $k=l$, 则已经得到有效解, 停止计算; 否则令 $k=k+1$, 转 (5).

和传统运输问题一样, 产销平衡的多目标运输问题必

定存在有效解. 且当某个非基变量的检验数向量等于 0 向量时, 该问题有多个有效解.

3 一个计算例子

例 1 试用表上作业法求解由表 2 所给多目标运输问题.

表 2 例 1 的表格形式

Tab 2 Tabular of example 1

产地	销地			产量
	B_1	B_2	B_3	
A_1	6	5	4	7
	3	5	2	
A_2	10	8	12	5
	8	4	6	
A_3	10	11	8	8
	9	10	7	
销量	8	10	2	

解 (1)用传统方法求出 $f_1(x)$ 的最优解, 把基变量的取值写在产销平衡表里相应格点中 $c_{ij}^{(k)}$ 的右边, 用 “ [] ” 括起来, 结果如表 3 所示.

表 3 例 1 的初始表

Tab 3 Initial tableau of example 1

产地	销地			产量
	B_1	B_2	B_3	
A_1	6 [0]	5 [5]	4 [2]	7
	3 [0]	5 [5]	2 [2]	
A_2	10	8 [5]	12	5
	8	4 [5]	6	
A_3	10 [8]	11	8	8
	9 [8]	10	7	
销量	8	10	2	

(2)计算位势向量, 分别附加在产销平衡表的右端和下端. 用位势法求出每一个目标函数的非基变量的检验数, 写在产销平衡表相应格点 (非基变量所对应的格点) 中 $c_{ij}^{(k)}$ 的右边的, 前面加 “ + ” “ - ” 符号, 结果如表 4 所示.

(3)令 $k=1$, 检查检验数向量的第 1 个分量. 显然, 所有检验数向量的第 1 个分量均不小于 0

(4)令 $k=2$, 检查检验数向量的第 2 个分量. 由于 $\sigma_{33}^{(2)} = -1 < 0$, 而 $\sigma_{33}^{(1)} = 0$, 所以当前解不是有效解.

(5)以格点 c_{33} 为主元, 用闭回路法进行调整, 调整后的结果如表 5 所示.

表 4 例 1 的第二表

Tab 4 Second tableau of example 1

产地	销地			产量	$P_1: u_i$ $P_2: s_i$
	B_1	B_2	B_3		
A_1	6 [0]	5 [5]	4 [2]	7	0
	3 ...[0]	5 ...[5]	2 ...[2]		
A_2	10 +1	8 [5]	12 +5	5	3
	8 +6	4 [5]	6 +5		
A_3	10 [8]	11 +2	8 +0	8	4
	9 ...[8]	10 ... -1	7... -1		
销量	8	10	2		
$P_1: v_i$	6	5	4		
$P_2: t_i$	3	5	2		

表 5 例 1 的第三表

Tab 5 Third tableau of example 1

产地	销地			产量
	B_1	B_2	B_3	
A_1	6 [2]	5 [5]	4	7
	3 [2]	5 [5]	2	
A_2	10	8 [5]	12	5
	8	4 [5]	6	
A_3	10 [6]	11	8 [2]	8
	9 [6]	10	7 [2]	
销量	8	10	2	

(6)再用位势法进行检验, 结果如表 6 所示.

表 6 例 1 的最终表

Tab 6 Final tableau of example 1

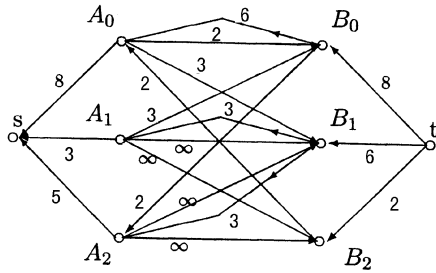
产地	销地			产量	$P_1: u_i$ $P_2: s_i$
	B_1	B_2	B_3		
A_1	6 [2]	5 [5]	4 +0	7	0
	3 [2]	5 [5]	2 +1		
A_2	10 +1	8 [5]	12 +5	5	3
	8 +6	4 [5]	6 +6		
A_3	10 [6]	11 +2	8 [2]	8	4
	9 [6]	10 -1	7 [2]		
销量	8	10	2		
$P_1: v_i$	6	5	4		
$P_2: t_i$	3	5	1		

(7)由于检验数向量的第 1 个分量均不小于 0; 在检验数向量的第 2 个分量中, 只有 $\sigma_{32}^{(2)} = -1 < 0$, 但 $\sigma_{32}^{(1)} = +2 > 0$, 所以表 6 给出的解是有效解. 即所求有效解为 $x_{11} = 2, x_{12} = 5, x_{22} = 5, x_{31} = 6, x_{33} = 2$, 其余 $x_{ij} = 0, \min(f_1, f_2)^T = (143, 104)^T$.

参考文献:

[1] 《运筹学》教材编写组. 运筹学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
[2] STRAYER J K Linear Programming and its Application [M]. New York: Springer-Verlag Word Publishing Corp, 1989.
[3] GASS S I Linear Programming Methods and Applications [M]. Fifth Edition Mc Graw Hill Book Compang, 1984.

(下转第 408 页)

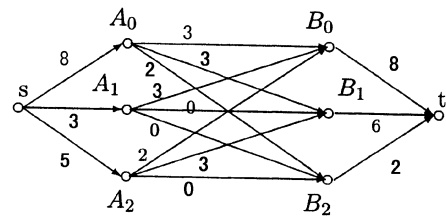
图 3 网络 G 的容量剩余网络 G_f Fig 3 The residual capacities network G_f of G

流 f 的总费用 $c(f) = 300$ 同样的方法再在 G_f 上找负费用圈,发现已无负费用圈. 因此,我们得到最小费用流 f' 对应到原问题中,其解为: $x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{21} = 3, x_{22} = 0$ 最小费用为 $c = 300$ 即只需从矿地 A_2 往城市 B_1 运煤 3 t,费用是 300 元.

参考文献:

- [1] 石忠民. 广义指派问题 [J]. 运筹与管理, 1999, 8(1): 21-26.
- [2] 余英姿, 张强. 一类广义指派问题的有效解法 [C] // 章祥荪, 王建方, 刘宝碇, 等. 中国运筹学会第七届学术交流会集. 青岛: Global-Link Publishing Company, 2004: 859-865.
- [3] 田丰, 马仲蕃. 图与网络流量论 [M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [4] PAPADIMITRIU C H, STEIGLITZ K. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1982.
- [5] 白国仲, 毛经中. C 指派问题 [J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23(3): 107-111.
- [6] 程桦, 宋执环. 受时间约束的运输问题求解的一种算法 [J]. 运筹与管理, 2003, 12(6): 67-70.

责任编辑: 任长江

图 4 网络 G 中的流 f' Fig 4 The low f' in G

3 结束语

广义运输问题有着广泛的实用背景, 因此很多学者在此领域进行研究^[5-6], 以期找到问题较好的解决方法. 本文给出的转换模式及最终的解法是简单而又便于应用的. 此外, 由于最小费用流问题与 Hitchcock 问题可以相互转换, 这就给我们提供了广义运输问题的另一种解法.

(上接第 405 页)

- [4] HAMMER P L. *Time in minimizing Transportation Problems* [J]. Naval Research Logistics Quarterly (S0894-069X), 1989, 16(3): 345-357.
- [5] GARFINKEL R S, RAO M S. *The Bottleneck Transportation Problem* [J]. Naval Research Logistics Quarterly (S0894-069X), 1991, 18(4): 465-472.
- [6] 陈庆华. 有容量限制的运输问题 [J]. 国防科技大学学报, 1986(3): 87-92.
- [7] 谢政. 带容量限制和手续费用的运输问题 [J]. 系统工程, 1998, 16(5): 25-31.
- [8] 石忠民. 求解推广的变数有上界运输问题 [J]. 系统工程, 1990, 8(2): 36-41.
- [9] 白国仲. 特殊环境下的运输问题 [J]. 灰色系统理论与实践, 1993, 3(1): 68-73.
- [10] BAI Guozhong, MAO Jinzhong. *G-Transportation Problems* [J]. The International Journal of Systems & Cybernetics (S0368-492X), 2004, 32(2): 219-224.
- [11] 白国仲. B 运输问题及其应用 [J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(11): 97-102.
- [12] 白国仲. 关于 B 运输问题的两点注记 [J]. 经济数学, 2001, 18(3): 91-94.
- [13] 白国仲. C 运输问题 [J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23(3): 107-111.
- [14] 白国仲. D 运输问题 [J]. 系统工程, 2004, 22(4): 21-25.
- [15] LEE S M, MOORE L J. *Optimizing Transportation Problems with Multiple Objectives* [J]. AIEE Trans (S1335-8242), 1993, 5(2): 333-338.
- [16] DIAZ J A. *Solving Multiobjective Transportation Problem* [J]. Ekonomika Mat Obzor, 1978, 14: 269-274.
- [17] ISERMANN H. *The Enumeration of All Efficient Solutions for a Linear Multiobjective Transportation Problem* [J]. Naval Research Logistics Quarterly (S0894-069X), 1979, 26: 123-139.
- [18] RINGUEST J L, RINKS D B. *Interaction Solutions for the Linear Multiobjective Transportation Problem* [J]. European Journal of Operational research (S0377-2217), 1987, 32(1): 96-106.
- [19] HAN S L. *Fuzzy Programming Approach Solution for Multiobjective Solid Transportation Problems* [J]. Journal of Southeast University (S1003-7985), 2004, 20(1): 102-107.
- [20] 胡毓达. 多目标规划有效性理论 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1993.
- [21] IGNIZO J P. *Goal Programming and Extensions* [M]. Boston: D C Heath and Company, 1976.

责任编辑: 任长江