·基础理论研究 ·

反对称自正交矩阵反问题解存在的条件

周红林 ,钱爱林

(咸宁学院 数学系 ,湖北 咸宁 437005)

摘 要:讨论了一类反对称自正交矩阵的反问题 ,得出问题存在解的充要条件及解的表达式 . 并讨论了用反对称自正交矩阵构造给定矩阵的最佳逼近问题 ,给出了该问题有解的充要条件和解的表达式 .

关键词:反对称自正交矩阵 ;矩阵范数 ;最佳逼近

中图分类号: O251. 6 **文献标识码**: A **文章编号**: 1003-0972 (2006) 03-0265-03

0 前言

近年来 ,特殊矩阵反问题的研究非常活跃 ,如双对称矩阵 [1,2] ,双反对称矩阵反问题 [3] ,对称正交反对称矩阵 [4] ,中心对称矩阵反问题 [5] 以及对称与反对称矩阵的反问题 [6~8] 等 . 反对称自正交矩阵在结构力学及土木工程等领域有实际应用 ,在许多问题中会遇到其逆特征值问题 . 因此研究此问题是有意义的 .

令 I_k 表示 k 阶单位矩阵 , S_k 表示 k 阶反序单位矩阵 , $J = \begin{pmatrix} 0 & S_k \\ -S_k & 0 \end{pmatrix}$, $R^{n\times m}$ 表示所有 $n\times m$ 阶实矩阵所组成的集合 , $C^{m\times m}$ 表示所有 $n\times m$ 阶复矩阵所组成的集合 , $\|\cdot\|$ 表示 Frobenius 范数 .

定义 若 $A\in R^{2k\times 2k}$,满足 $JAJ^T = A^T, A^T = -A$,则称 A 为反对称自正交矩阵 ,所有反对称自正交矩阵的全体记为 $ASOR^{n\times n}$,这里 $n = 2k$

本文讨论如下问题 :

问题 1 给定 $X\in R^{n\times m}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$,求 $A\in ASOR^{n\times n}$,使得 $AX = X\Lambda$.

问题 2 给定 $\widetilde{A}\in R^{n\times n}$,求 $\hat{A}\in S_E$,使 $\|\widetilde{A} - \hat{A}\| = \min_{A\in S_E} \|\widetilde{A} - A\|$,其中 S_E 是问题 1的解集 .

1 问题 1的解

我们首先研究反对称自正交矩阵的结构 . 由定义可得如下结构 :

引理 1

$$ASOR^{n\times n} = \left\{ \begin{pmatrix} P & QS_k \\ S_kQ & -S_kPS_k \end{pmatrix} \middle| Q = -Q^T, P = -P^T \in R^{k\times k} \right\}. \quad (1)$$

证明 若 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in ASOR^{n\times n}$,则由 $JAJ^T = A^T$, $A^T = -A$ 有

$$\begin{pmatrix} 0 & S_k \\ -S_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -S_k \\ S_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}, \quad (2)$$

和

$$\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

式 (2), (3)等价于

$$A_{11}^T = -A_{11}, A_{21}^T = -A_{12}, A_{22}^T = -A_{22},$$
$$S_kA_{22}S_k = -A_{11}, S_kA_{21}S_k = A_{12},$$
$$S_kA_{12}S_k = A_{21}, S_kA_{11}S_k = -A_{22}, \quad (4)$$

令 $A_{12}S_k = Q, A_{11} = P$,则有 $Q = -Q^T, P = -P^T, A_{12} = QS_k, A_{22} = -S_kPS_k$,因而有

$$A = \begin{pmatrix} P & QS_k \\ S_kQ & -S_kPS_k \end{pmatrix}, Q = -Q^T, P = -P^T \in R^{k\times k}. \quad (5)$$

反之 ,若 $Q = -Q^T, P = -P^T$,则显然有

$$\begin{pmatrix} P & QS_k \\ S_kQ & -S_kPS_k \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -P & -QS_k \\ -S_kQ & S_kPS_k \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} 0 & S_k \\ -S_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & QS_k \\ S_kQ & -S_kPS_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -S_k \\ S_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & -QS_k \\ -S_kQ & S_kPS_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & QS_k \\ S_kQ & -S_kQS_k \end{pmatrix}^T,$$

因此

$$\begin{pmatrix} P & QS_k \\ S_kQ & -S_kPS_k \end{pmatrix} \in ASOR^{n\times n},$$

$Q = -Q^T, P = -P^T \in R^{k\times k}$. 证毕

令

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_k & I_k \\ iS_k & -iS_k \end{pmatrix} \quad (6)$$

显然 $D^HD = DD^H = I_n$.

收稿日期: 2005-12-13

作者简介:周红林 (1968-) ,女 ,湖北鄂州人 ,硕士 ,讲师 ,主要从事矩阵论、数学教育等方向的研究.

定理 1　$ASOR^{n\times n}$中矩阵的一般形式为

$$A = D\begin{pmatrix} 0 & -F^T \\ F & 0 \end{pmatrix} D^H,\ F\in C^{k\times k}. \tag{7}$$

证明　由引理 1, $A\in ASOR^{n\times n}$的一般形式为

$$A = \begin{pmatrix} P & QS_k \\ S_kQ & -S_kPS_k \end{pmatrix},$$

因此

$$D^HAD = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_k & -\mathrm{i}S_k \\ I_k & \mathrm{i}S_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & QS_k \\ S_kQ & -S_kPS_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & I_k \\ \mathrm{i}S_k & -\mathrm{i}S_k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & P-\mathrm{i}Q \\ P+\mathrm{i}Q & 0 \end{pmatrix}.$$

证毕

令 $F = P + \mathrm{i}Q$,则 $F^T = -P + \mathrm{i}Q$,所以 $ASOR^{n\times n}$中矩阵的一般形式为 $:D\begin{pmatrix} 0 & -F^T \\ F & 0 \end{pmatrix} D^H$.

引理 2[9]　在复数域内,矩阵方程 $AX = C, XB = D$有解的充要条件是

$$AA^+C = C,\quad DB^+B = D,\quad AD = CB, \tag{8}$$

且通解为

$$X = A^+C + DB^+ - A^+ADB^+ + (I - A^+A)Z(I - BB^+), \tag{9}$$

Z是任意的 .

定理 2　已知 $X\in R^{n\times m}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$,记

$$D^HX = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},\ X_1\in C^{(n-k)\times m}, \tag{10}$$

则当且仅当

$$\begin{cases} X_2^TX_2^{T+}\Lambda X_1^T = \Lambda X_1^T, \\ X_2\Lambda X_1^+X_1 = X_2\Lambda, \\ X_2^TX_2\Lambda = -\Lambda X_1^TX_1 \end{cases} \tag{11}$$

时问题 1有解,且通解为

$$A = A_0 + D\begin{pmatrix} 0 & -(I_{n-k} - X_1^{T+}X_1^T)Z^T(I_k - X_2X_2^+) \\ (I_k - X_2^{T+}X_2^T)Z(I_{n-k} - X_1X_1^+) & 0 \end{pmatrix}D^H,$$

Z是任意的,其中

$$A_0 = D\begin{pmatrix} 0 & X_1\Lambda X_2^+ - X_1^{T+}\Lambda X_2^T + X_1^{T+}\Lambda X_2^TX_2X_2^+ \\ -X_2^{T+}\Lambda X_1^T + X_2\Lambda X_1^+ - X_2^TX_2\Lambda X_1^+ & 0 \end{pmatrix}D^H.$$

证明　若 A是问题 1的解,则由定理 1知问题 1有解当且仅当存在 $F\in C^{k\times k}$,使

$$A = D\begin{pmatrix} 0 & -F^T \\ F & 0 \end{pmatrix}D^H, AX = X\Lambda$$

成立,即

$$D\begin{pmatrix} 0 & -F^T \\ F & 0 \end{pmatrix}D^HX = X\Lambda \tag{12}$$

成立 .

式 (12)等价于

$$X_2^TF = -\Lambda X_1^T,\ FX_1 = X_2\Lambda, \tag{13}$$

由引理 2知式 (13)有解当且仅当

$$X_2^TX_2^{T+}\Lambda X_1^T = \Lambda X_1^T,\ X_2\Lambda X_1^+X_1 = X_2\Lambda,\ X_2^TX_2\Lambda = -\Lambda X_1^TX_1 \tag{14}$$

且 (13)式的一般解为

$$F = -X_2^{T+}\Lambda X_1^T + X_2\Lambda X_1^+ - X_2^{T+}X_2^TX_2\Lambda X_1^+ + (I_k - X_2^{T+}X_2^T)Z(I_{n-k} - X_1X_1^+), \tag{15}$$

令

$$A_0 = D\begin{pmatrix} 0 & X_1\Lambda X_2^+ - X_1^{T+}\Lambda X_2^T + X_1^{T+}\Lambda X_2^TX_2X_2^+ \\ -X_2^{T+}\Lambda X_1^T + X_2\Lambda X_1^+ - X_2^{T+}X_2^TX_2\Lambda X_1^+ & 0 \end{pmatrix}D^H,$$

将式 (15)代入式 (7),即得通解表达式 .　　证毕

2　问题 2的解

当问题 1的解集合 S_E非空时,易证 S_E是完备内积空间 $R^{n\times n}$中的一个闭凸集,由最佳逼近定理知问题 2存在惟一解 .

引理 3[9]　设 $B\in C^{m\times m}$, $C\in C^{m\times m}$,则

$$\|A - B\|^2 + \|A - C\|^2 = \min, A\in C^{m\times m}$$

的解为$\frac{B + C}{2}$.

定理 3　已知 $A\in R^{n\times n}$,记号和条件与定理 2一致,则问题 2存在惟一解,并且解为

$$\hat{A} = A_0 + D\begin{pmatrix} 0 & \frac{A_{12} - A_{21}^T}{2} \\ \frac{A_{21} - A_{12}^T}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

其中

$$A_{12} = \frac{1}{2}(I_k\quad -\mathrm{i}S_k)(A - A_0)\begin{pmatrix} I_k \\ -\mathrm{i}S_k \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \frac{1}{2}(I_k\quad \mathrm{i}S_k)(A - A_0)\begin{pmatrix} I_k \\ \mathrm{i}S_k \end{pmatrix}.$$

证明　因为 S_E是一个闭凸集,所以问题 2存在惟一解 A,由问题 1通解表达式知 S_E中的每一个矩阵都具有形式

$$A = A_0 + D\begin{pmatrix} 0 & -(I_{n-k} - X_1^{T+}X_1^T)Z^T(I_k - X_2X_2^+) \\ (I_k - X_2^{T+}X_2^T)Z(I_{n-k} - X_1X_1^+) & 0 \end{pmatrix}D^H.$$

令

$$D^H(A - A_0)D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

其中

$$A_{11} = \frac{1}{2}(I_k\quad -\mathrm{i}S_k)(A - A_0)\begin{pmatrix} I_k \\ \mathrm{i}S_k \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = \frac{1}{2}(I_k\quad -\mathrm{i}S_k)(A - A_0)\begin{pmatrix} I_k \\ -sS_k \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \frac{1}{2}(I_k\quad \mathrm{i}S_k)(A - A_0)\begin{pmatrix} I_k \\ \mathrm{i}S_k \end{pmatrix},$$

$$A_{22} = \frac{1}{2}(I_k \quad iS_k)(A - A_0)\begin{pmatrix} I_k \\ -iS_k \end{pmatrix}.$$

由于

$$\|A - A\|^2 = \|A_{11}\|^2 + \|A_{12} + (I_{n-k} - X_1^{T+}X_1^T)Z^T(I_k - X_2X_2^+)\|^2 + \|A_{21} - (I_k - X_2^{T+}X_2^T)Z(I_{n-k} - X_1X_1^+)\|^2 + \|A_{22}\|^2,$$

因此, $\|A - A\| = \min$等价于

$$\|A_{12}{}^T + (I_k - X_2^{T+}X_2^T)Z(I_{n-k} - X_1X_1^+)\|^2 + \|A_{21} - (I_k - X_2^{T+}X_2^T)Z(I_{n-k} - X_1X_1^+)\|^2 = \min. \tag{18}$$

为方便记 $P = I_k - X_2^{T+}X_2^T$, $Q = I_{n-k} - X_1X_1^+$,则 P, Q都是正交投影矩阵,有

$$P^2 = P, Q^2 = Q. \tag{19}$$

由引理3知,式(18)的解为

$$PZQ = \frac{-A_{12} + A_{21}}{2}, \tag{20}$$

再由式(19)有

$$Z = P\frac{-A_{12} + A_{21}}{2}Q \tag{21}$$

将式(20)代入式(7)即得到式(16). 证毕

参考文献:

[1] 胡锡炎,张 磊,谢冬秀. 双对称矩阵逆特征值问题解存在的条件[J]. 计算数学, 1998, 20(4): 409-418.

[2] 廖安平,谢冬秀. 双对称非负定阵一类逆特征值问题的最小二乘解[J]. 计算数学, 2001, 23(2): 209-218.

[3] 盛炎平,谢冬秀. 双反对称矩阵反问题解存在的条件[J]. 数值计算与计算机应用, 2002, 24(3): 111-120.

[4] 戴 华. 对称正交反对称矩阵反问题解存在的条件[J]. 高等学校计算数学学报, 2002, 24(2): 169-178.

[5] 周富照,张中志. 半正定的中心对称矩阵反问题[J]. 湖南大学学报, 2001, 28(1): 24-28.

[6] 谢冬秀,张 磊. 一类反对称矩阵反问题的最小二乘解[J]. 工程数学学报, 1993, 10(4): 25-34.

[7] 胡锡炎,张 磊. 一类矩阵反问题的最小二乘解[J]. 湖南大学学报, 1990, 17(2): 98-102.

[8] SUN J. *Backward Perturbation Analysis of Certain Characteristic Subspaces*[J]. Numer Math, 1993, 65: 357-382.

[9] XIE D, HU X, ZHANG L. *The Solvability Conditions for Inverse Eigenproblem of Symmetric Matrices and Anti-persymmetric Matrices and its Approximation Numer*[J]. Linear Algebra Appl (S 0024-3795), 2003, 10: 223-234.

Least-square Solutions of Inverse Problem for Symmetric Orthogonal Anti-symmetric Matrices

ZHOU Hong-lin, QIAN Ai-lin

(Dept of Math, Xianning College, Xianning 437005, China)

Abstract: A kind of inverse problem for anti-symmetric and orthogonal matrices is discussed. The necessary and sufficient conditions about the problem and expression of the solution are obtained. In addition, the problem of using anti-symmetric and orthogonal matrices to construct the optimal approximation to a given matrix is discussed, the necessary and sufficient conditions about the problem are derived, and the expression of the solution are provided.

Key words: anti-symmetric and self-orthogonal matrices; matrix norm; optimal approximation

责任编校:郭红建