DOI: DOI: 10.3969/j.issn.1003-0972.2012.01.001

可修复计算机系统算子的半群特征

陶有德[1*],于景元[2],朱广田[3]

(1. 信阳师范学院 数学与信息科学学院,河南 信阳 464000;
2. 中国航天科技集团 第710研究所,北京 100037;
3. 中国科学院 数学与系统科学研究院,北京 100080)

摘 要:研究一类可修复计算机系统模型,利用线性算子半群理论讨论系统算子的半群特征. 结果表明,系统算子具有闭性、稠定性和耗散性.

关键词: 可修复系统; C_0 半群理论; 抽象 Cauchy 问题; 半群特征
中图分类号:O177.2 文献标志码: A 文章编号: 1003-0972(2012)01-0001-04

Semigroup Characteristics of a Repairable Computer System Operator

TAO You-de[1*],YU Jing-yuan[2],ZHU Guang-tian[3]

(1. College of Mathematics and Information Sciences, Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China;
2. The 710th Institute of China Aerospace Science and Technology Corporation, Beijing 100037, China;
3. Institute of Mathematics and System Sciences, C. A. S., Beijing 100080, China)

Abstract: The mathematical model of a repairable computer system was studied by using the linear operator semigroup theory. The semigroup characteristics of the system operator were discussed. The results shown that the system operator is closed, dense and dissipative.

Key words: repairable system; C_0-semigroup theory; abstract Cauchy problem(ACP); semigroup characteristics

0 引言

线性算子半群理论是研究可修复系统的理论基础和重要工具,尤其是在讨论系统解的适定性、渐近性和稳定性等方面发挥着作用[1-2]. 与此同时,利用数学模型的方法,研究、评价计算机系统的可靠性已经成为可靠性理论及可靠性数学的热门课题,并取得了一些有用结果[3-7]. 基于此,本文利用线性算子半群理论,研究一类硬件及软件的寿命、修复时间均服从一般分布的可修复计算机系统模型[8],并讨论系统算子的半群特征,以期进一步讨论此类系统解的存在唯一性、渐近稳定性,并在此基础上研究系统的可靠性.

1 数学模型及其转换

由文献[8],可修复计算机系统的数学模型可以用积分-微分方程组描述:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} = -(\lambda_1+\lambda_2)p_0(t) + \\ \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty \mu_i(x)p_i(x,t)\,\mathrm{d}x, \\ \dfrac{\partial p_i(x,t)}{\partial x} + \dfrac{\partial p_i(x,t)}{\partial t} = -\mu_i(x)p_i(x,t),\ i=1,2, \\ p_1(0,t) = \lambda_1 p_0(t), \\ p_2(0,t) = \lambda_2 p_0(t), \\ p_0(0) = 1, p_1(x,0) = p_2(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $(x,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$; $p_0(t)$ 表示 $t=0$ 时刻所有部件是全新的,并且整个计算机系统处于正常工作状态的概率; $p_1(x,t)\mathrm{d}x$, $p_2(x,t)\mathrm{d}x$ 分别表示在 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 内由硬件故障和软件故障引起系统故障的概率; λ_1, λ_2 分别表示硬件和软件的

收稿日期:2011-09-19;修订日期:2011-04-06; * . 通讯联系人, E-mail: xyyoudet1104@163.com
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671166); 河南省重点科技攻关项目(092100210070); 河南省教育厅自然科学基金项目(2010B120010)
作者简介:陶有德(1964-),男,河南潢川人,副教授,博士,主要从事系统工程和泛函分析研究.

故障率;$\mu_1(x)$,$\mu_2(x)$ 分别表示硬件和软件的修复率，且满足

$$0 \leqslant \mu_i(x) < \infty, M_i = \sup_{x \in [0,\infty)} \mu_i(x) < \infty,$$

$$\int_0^\infty \mu_i(x)\,\mathrm{d}x = \infty, i = 1,2.$$

由于系统模型(1)既含有积分运算又含有微分、偏微分运算，直接求解比较困难，因此需要进行必要转换，使之成为抽象 Cauchy 问题. 为此，一方面，选取状态空间 $X = \mathbf{R} \times (L^1[0,\infty))^2$，对于任意 $p = (p_0, p_1, p_2) \in X$，定义范数

$$\| p \| = | p_0 | + \| p_1 \|_{L^1[0,\infty)} + \| p_2 \|_{L^1[0,\infty)},$$

则容易验证状态空间 X 是完备的赋范线性空间，因而 X 是一个 Banach 空间. 另一方面，定义

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mu_1(x) & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mu_2(x) \end{bmatrix},$$

$D(\boldsymbol{A}) = \{ p \in X \mid \dfrac{\mathrm{d}p_i(x)}{\mathrm{d}x} \in L^1[0,\infty), p_i(x)$ 是绝对连续函数, $i = 1,2$, 且 $p_1(0) = \lambda_1 p_0, p_2(0) = \lambda_2 p_0\}$, 以及

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & \int_0^\infty \mu_1(x)\,\mathrm{d}x & \int_0^\infty \mu_2(x)\,\mathrm{d}x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则可修复计算机系统模型(1)可表示为 Banach 空间 X 上的抽象 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})p(t), t \geqslant 0, \\ p(0) = (1,0,0), \\ p(t) = (p_0(t), p_1(x,t), p_2(x,t)). \end{cases} \tag{2}$$

2　系统算子的半群特征

本节主要讨论抽象 Cauchy 问题(2)的系统算子 A 的半群特征.

首先，为便于叙述并讨论本文的主要结果，在此给出相关的定义、引理和记号[9-10].

设 X^* 是 Banach 空间 X 的共轭空间, A^* 是算子 A 的共轭算子. $x^* \in X^*$ 在点 $x \in X$ 的值记作 $\langle x^*, x \rangle$ 或 $\langle x, x^* \rangle$. 对于任意 $x \in X$，集合

$$F(x) = \{ x^* \mid \langle x^*, x \rangle = \| x^* \|^2 = \| x \|^2 \}$$

称作 x 的对偶集合，并且由 Hahn-Banach 定理，对于任意 $x \in X$, $F(x) \neq \varnothing$.

定义 1　设 $A: D(A) \subset X \to X$ 是线性算子. 若 $\overline{D(A)} = X$，则称 A 是稠定算子.

定义 2　设 $A: D(A) \subset X \to X$ 是线性算子. 若对于任意 $\{x_n\} \subset D(A)$，当

$$x_n \to x, Ax_n \to y (n \to \infty)$$

时，总有 $x \in D(A)$ 且 $Ax = y$，则称 A 是闭算子.

定义 3　设 $A: D(A) \subset X \to X$ 是线性算子. 若对于任意 $x \in D(A)$，存在 $x^* \in F(x)$，使得

$$\mathrm{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leqslant 0,$$

则称 A 是耗散算子.

定义 4　设 $A: D(A) \subset X \to X$ 是线性算子. 若对于任意 $x \in D(A)$，总有

$$\langle Ax, x^+ \rangle \leqslant 0,$$

其中 $x^+ = \max\{x, 0\}$，则称 A 是扩散算子.

引理 1[2]　若 A 是闭稠定的扩散算子，则 A 是耗散算子.

其次，给出本文的主要结果.

定理 1　系统(2)算子 $\boldsymbol{A}$ 是稠定算子.

证明　构造集合 $L = \{ p_0, p_1(x), p_2(x)) \mid p_i(x) \in C_0^\infty[0,\infty)$, 且存在常数 $C_i > 0$, 使得对任意 $x \in [0, C_i]$, 有 $p_i(x) = 0, i = 1,2\}$, 则容易证明 L 在 Banach 空间 X 中稠密. 于是由定义 1，要证明 $\boldsymbol{A}$ 是稠定算子，只需证明 $D(A)$ 在 X 中稠密，即证明 $D(A)$ 在 L 中稠密. 为此，任取 $p = (p_0, p_1(x), p_2(x)) \in L$, 则 $\forall i (i = 1,2)$, $\exists$ 常数 $C_i > 0$，使得当 $x \in [0, C_i]$ 时，总有 $p_i(x) = 0$. 于是当 $x \in [0, 2s]$, $0 < 2s < \mathrm{mim}\{C_1, C_2\}$ 时,

$$p_i(x) = 0 (i = 1,2).$$

令 $f(0) = (p_0, f_1(0), f_2(0)) = (p_0, \lambda_1 p_0, \lambda_2 p_0)$, $f(x) = (p_0, f_1(x), f_2(x))$, 其中

$$f_i(x) = \begin{cases} f_i(0)(1 - \dfrac{x}{s})^2, & x \in [0, s), \\ -\mu_i(x-s)^2(x-2s)^2, & x \in [s, 2s), i = 1,2, \\ p_i(x), & x \in [2s, \infty), \end{cases}$$

$$\mu_i = \frac{f_i(0)\int_0^{2s} \mu_i(x)(1 - \frac{x}{s})^2 \mathrm{d}x}{\int_0^{2s} \mu_i(x)(x-s)^2(x-2s)^2 \mathrm{d}x}, i = 1,2,$$

则容易验证 $f(x) \in D(\boldsymbol{A})$，且

$$\| p - f(x) \| = \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty | p_i(x) - f_i(x) | \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^2 \int_0^{2s} | p_i(x) - f_i(x) | \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^s | f_i(0) | (1 - \frac{x}{s})^2 \mathrm{d}x + \right.$$

$$\int_s^{2s} |\mu_i|(x-s)^2(x-2s)^2\mathrm{d}x) =$$

$$\sum_{i=1}^{2}(|f_i^s(0)|\frac{s}{3}+$$

$$|\mu_i|\frac{s^2}{30}) \to 0(s\to 0). \qquad (3)$$

式(3)表明$D(A)$在L中稠密,故$D(A)$在X中稠密. 于是由定义1知,系统(2)算子A是稠定算子.

定理2　系统(2)算子A是闭算子.

证明　证明分两步进行.

1)首先证明当$\gamma>0$时,$\gamma\in\rho(A)$,并且

$$\|(\gamma I-A)^{-1}\| < \frac{1}{\gamma}.$$

为此,对于任意$y=(y_0,y_1(x),y_2(x))\in X$,讨论方程$(\gamma I-A)p=y$. 这等价于

$$\begin{cases}(\gamma+\lambda_1+\lambda_2)p_0=y_0,\\ \dfrac{\mathrm{d}p_i(x)}{\mathrm{d}x}=-(\gamma+\mu_i(x))p_i(x)+y_i(x),i=1,2,\\ p_1(0)=\lambda_1p_0,\\ p_2(0)=\lambda_2p_0.\end{cases} \qquad (4)$$

由此可得

$$p_0=\frac{y_0}{\gamma+\lambda_1+\lambda_2},$$

$$p_1(x)=\lambda_1p_0\mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x\mu_1(\xi)\mathrm{d}\xi}+ \mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x\mu_1(\xi)\mathrm{d}\xi}\int_0^x\mathrm{e}^{-\gamma\tau-\int_0^\tau\mu_1(\xi)\mathrm{d}\xi}y_1(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$p_2(x)=\lambda_2p_0\mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x\mu_2(\xi)\mathrm{d}\xi}+ \mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x\mu_2(\xi)\mathrm{d}\xi}\int_0^x\mathrm{e}^{-\gamma\tau-\int_0^\tau\mu_2(\xi)\mathrm{d}\xi}y_2(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (5)$$

于是由式(4)和(5)及Fubini定理有

$$\|p\|=|p_0|+\|p_1\|_{L^1[0,\infty)}+ \|p_2\|_{L^1[0,\infty)}\leqslant$$

$$|p_0|+\sum_{i=1}^{2}(\lambda_ip_0\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x\mu_i(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x+ \int_0^\infty\mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x\mu_i(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{-\gamma\tau-\int_0^\tau\mu_i(\xi)\mathrm{d}\xi}|y_i(\tau)|\mathrm{d}\tau)=$$

$$|p_0|+\sum_{i=1}^{2}(\lambda_ip_0\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x\mu_i(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x+ \int_0^\infty|y_i(\tau)|\mathrm{e}^{-\gamma\tau-\int_0^\tau\mu_i(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau\int_\tau^\infty\mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x\mu_i(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x)\leqslant$$

$$|p_0|+\sum_{i=1}^{2}(\lambda_ip_0\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\gamma x}\mathrm{d}x+ \int_0^\infty|y_i(\tau)|\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\mathrm{d}\tau\int_\tau^\infty\mathrm{e}^{-\gamma x}\mathrm{d}x) <$$

$$\frac{1}{\gamma+\lambda_1+\lambda_2}|y_0|+ \sum_{i=1}^{2}(\frac{1}{\gamma}(\frac{\lambda_i}{\gamma+\lambda_1+\lambda_2}|y_0|)+ \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty|y_i(\tau)|\mathrm{d}\tau)=$$

$$\frac{1}{\gamma}(|y_0|+\|y_1\|_{L^1[0,\infty)}+ \|y_2\|_{L^1[0,\infty)})=\frac{1}{\gamma}\|y\|, \qquad (6)$$

其中$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\gamma x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\gamma}$,$\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\leqslant 1$,$\gamma>0$,$\tau\in[0,\infty)$.

式(6)表明当$\gamma>0$时,$(\gamma I-A)^{-1}:X\to X$是有界线性算子,$\gamma\in\rho(A)$且$\|(\gamma I-A)^{-1}\| < \frac{1}{\gamma}$.

2)其次证明A是闭算子.

事实上,由1)可知,对于任意$\gamma>0$,$\gamma I-A$是$D(A)$到X的一一对应,并且

$$\|(\gamma I-A)^{-1}\| < \frac{1}{\gamma}.$$

设$x_n\in D(A)$,$x_n\to x$,$Ax_n\to y(n\to+\infty)$,则

$$(\gamma I-A)x_n\to\gamma x-y,$$

即$x_n\to(\gamma I-A)^{-1}(\gamma x-y)$. 故由定理1,

$$x=(\gamma I-A)^{-1}(\gamma x-y)\in D(A),$$

并且$Ax=y$. 于是由定义2知,系统算子A是闭算子.

定理3　系统(2)算子A是耗散算子.

证明　任取$p\in D(A)$,令

$$Q_p=[\frac{[p_0]^+}{p_0},\frac{[p_1(x)]^+}{p_1(x)},\frac{[p_2(x)]^+}{p_2(x)}],$$

其中

$$[p_0]^+=\max\{p_0,0\},$$

$$[p_i(x)]^+=\max\{p_i(x),0\},i=1,2.$$

因此

$$\langle(A+E)p,Q_p\rangle=(-(\lambda_1+\lambda_2)p_0+ \sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty p_i(x)\mu_i(x)\mathrm{d}x)\frac{[p_0]^+}{p_0}- \sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty(\frac{\mathrm{d}p_i(x)}{\mathrm{d}x}+ \mu_i(x)p_i(x))\frac{[p_i(x)]^+}{p_i(x)}\mathrm{d}x=$$

$$-(\lambda_1+\lambda_2)[p_0]^++ \frac{[p_0]^+}{p_0}\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty p_i(x)\mu_i(x)\mathrm{d}x- \sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}p_i(x)}{\mathrm{d}x}\frac{[p_i(x)]^+}{p_i(x)}\mathrm{d}x-$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty \mu_i(x)[p_i(x)]^+\,dx =$$
$$-(\lambda_1+\lambda_2)[p_0]^+ +$$
$$\frac{[p_0]^+}{p_0}\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty p_i(x)\mu_i(x)\,dx +$$
$$\sum_{i=1}^{2}[p_i(0)]^+ -$$
$$\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty \mu_i(x)[p_i(x)]^+\,dx \leqslant$$
$$-(\lambda_1+\lambda_2)[p_0]^+ +$$
$$\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty \mu_i(x)[p_i(x)]^+\,dx +$$
$$\lambda_1[p_0]^+ + \lambda_2[p_0]^+ -$$
$$\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty \mu_i(x)[p_i(x)]^+\,dx = 0. \tag{7}$$

故由定义 4 可知，$A+E$ 是扩散算子. 于是由引理 1 知，$A+E$ 是耗散算子. 又由于 $A+E$ 是有界算子，故由文献[2]以及文献[9-10]可得，系统算子 A 是耗散算子.

3　结论

利用线性算子理论，讨论了一类可修复计算机系统算子的半群特征. 结果表明，可修复计算机系统(2)算子 A 具有 C_0 压缩半群的固有属性，即闭性、稠定性和耗散性，从而为讨论系统算子 A 能否成为 C_0 压缩半群的无穷小生成元提供了理论参考.

参考文献:

[1] Pazy A. *Semigroups of linear operators and application to partial differential equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

[2] Gupur G, Li X Z, Zhu G T. *Functional analysis method in queueing theory*[M]. Hertfordshire, United Kingdom: Research Information Ltd, 2001.

[3] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论(修订版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[4] 史定华. 随机模型的密度演化方法[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[5] 吴祥, 张婧, 唐应辉, 等. 基于硬软件特性的计算机系统的可靠性分析[J]. 中国民航飞行学院学报, 2006, 17(1): 33-36.

[6] 乔兴, 唐莉. 具有软硬件可修复计算机系统解的性质分析[J]. 大庆师范学院学报, 2008, 28(5): 82-84.

[7] 徐厚宝, 徐文兵, 于景元, 等. 软件再生系统解的渐近稳定性分析[J]. 数学的实践与认识, 2004, 34(12): 112-118.

[8] 陶有德, 乔兴, 于景元, 等. 一类可修复计算机系统的数学模型[J]. 信阳师范学院学报: 自然科学版, 2010, 23(3): 330-332.

[9] 陶有德, 郭丽娜, 于景元, 等. 可修复系统中具有耗散算子的抽象 Cauchy 问题解的适定性[J]. 信阳师范学院学报: 自然科学版, 2009, 22(3): 357-359.

[10] 陶有德, 任鹏, 于景元. Hilbert 空间中耗散算子的性质研究[J]. 数学理论与应用, 2010, 30(2): 5-8.

责任编辑: 郭红建