信阳师范学院学报(自然科学版)
第 18 卷　第 1 期　2005 年 1 月

Journal of Xinyang Normal University
(Natural Science Edition) Vol. 18 No. 1 Jan. 2005

·应用技术研究·

二元关系传递闭包的Warshall算法及应用

刘宏兵[1,2], **郭红建**[2], **李　昊**[3]

(1. 武汉理工大学 计算机学院, 湖北 武汉 430070; 2. 信阳师范学院, 河南 信阳 464000;
3. 河南省科技情报研究所, 河南 郑州 450003)

摘　要: 介绍了传递闭包的Warshall算法, 从布尔矩阵运算的角度论证该算法的正确性, 并讨论Warshall算法在语法分析中的应用技术和用改进Warshall算法求有向图的距离矩阵.

关键词: 传递闭包; Warshall算法; 布尔初等变换

中图分类号: TP310.6　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1003-0972(2005)01-0103-03

0　引言

关系的传递闭包是关系逻辑中的重要内容之一, 它在计算机科学中的形式语言与自动机理论等方面有着重要的应用. 对于传递闭包的计算, 目前文献[1～3]大多采用两种方法: (1) 利用关系合成 R^i ($i=1, 2, \cdots$) 的并运算; (2) 利用Warshall算法. 对于Warshall算法, 都是利用关系的扩张原理来解释其正确性, 很少利用关系的矩阵运算来解释其正确性. 本文从矩阵变换的角度论证Warshall算法的正确性, 并讨论该算法在语法分析和利用改进的Warshall算法在求有向图的距离矩阵中的应用.

1　二元关系的传递闭包

二元关系的闭包运算和关系的合成一样, 都是利用扩张原理来构造新关系, 不同的是闭包运算是在一种关系的基础上进行扩充而形成新的关系, 而合成是在两种关系的基础上, 利用关系的复合而形成新关系.

定义 1　设 R, R 为集合 A 上的二元关系, 若 R 满足

(1) R 是传递的;

(2) $R \subseteq R$;

(3) R'' 为 A 上的具有传递性质的闭包, 若 $R \subseteq R''$, 则 $R \subseteq R''$;

则称 R 为 R 的传递闭包, 用 $t(R)$ 表示. 条件(1) (2) (3) 说明 R 为 R 的具有传递性质的最小闭包.

2　二元关系传递闭包的构造定理

定理 1　设 R 为集合 A 上的二元关系, 则其传递闭包为 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

证明　(1) 先证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$.

当 $i=1$ 时, $R \subseteq t(R)$.

若 $i=k$ 时 $R^k \subseteq t(R)$, 则 $i=k+1$ 时, $\forall (x, y) \in R^{k+1}$, 由关系合成的定义知存在 $z \in A$ 使得 $(x, z) \in R^k$, $(z, y) \in R$, 由归纳假设知 $(x, z) \in t(R)$, $(z, y) \in t(R)$, 再由 $t(R)$ 的传递性知 $(x, y) \in t(R)$, 所以 $R^{k+1} \subseteq t(R)$, 故 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$.

(2) 再证 $t(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

$\forall (x, y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, $(y, z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, 存在 $s, t \in N$ 使 $(x, y) \in R^s$, $(y, z) \in R^t$, 由关系合成的定义知 $(x, z) \in R^{s+t}$, 而 $R^{s+t} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, 故 $(x, z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, 所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 具有传递性, 由传递闭包的定义知 $t(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

由(1) (2) 知 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.　　证毕

定理 2　设 R 为集合 A 上的二元关系, $|A| = n$, 则其传递闭包为 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

证明　(略)

收稿日期: 2004-05-08

作者简介: 刘宏兵(1971-), 男, 河南信阳人, 讲师, 硕士, 现从事离散数学的教学和研究工作.

3　Warshall 算法及其正确性分析

3.1　Warshall 算法

通过定理 1、定理 2 求关系的传递闭包非常麻烦.Warshall 于 1962 年提出了求关系传递闭包的 Warshall 算法. 记 M_R 为 R 的关系矩阵, $M_{t(R)}$ 为 $t(R)$ 的传递闭包的关系矩阵, 则可利用下述算法求出 $t(R)$.

算法 1:

1. $A \leftarrow M_R, A = (a_{ij})$;
2. for $j = 1$ to N;
3. for $i = 1$ to N;
4. for $k = 1$ to N;
5. 若 $a_{ij} = 1$, 则 $a_{ik} = a_{ik} + a_{jk}$.

算法中的第 5 步为处理三元组, 其全部个数为 n^3, 第一步需 $O(n^3)$ 时间, 故对任何矩阵 M, 其计算的时间复杂度为 $O(n^3)$.

3.2　布尔初等变换及布尔矩阵的性质

定义 2　设矩阵 A 为布尔矩阵, 若某一行元素布尔加到另外一行的对应元素得到矩阵 B, 则称 B 由 A 经过变换得到. 该变换称为布尔初等变换.

布尔变换和一般的矩阵变换一样, 若是行变换, 则 B 可表示为 A 左乘一初等矩阵; 若是列变换, 则 B 可表示为 A 右乘一初等矩阵;

很显然布尔运算有如下性质:

(1) A 为布尔矩阵, 则 $A + A = A$;

(2) 设 E_{ij} 为第 i 行第 j 列元素为 1, 其他元素为 0 的矩阵, 则 $E_{ik}E_{kj} = E_{ij}$.

3.3　Warshall 算法的正确性分析

该算法从 A 中第一列开始到第 n 列结束, 逐列检查其每行元素是否为 1, 若 $a_{ij} = 1$, 则将第 j 行元素加到第 i 行. 这一过程实际对矩阵 A 进行一系列布尔初等行变换. 设 E_{ij} 为第 i 行第 j 列元素为 1, 其他元素为 0 的矩阵, 则这一过程可表示为

$$M_{t(R)} = (E + E_{i_{nn}n}) \cdots (E + E_{i_{n1}n}) \cdots (E + E_{i_{1n}1}) \cdots (E + E_{i_{12}1})(E + E_{i_{11}1})A,$$

其中 $E_{i_{jk}j}$ 表示矩阵的第 j 列的第 i_{jk} 个元素为 1. 展开得

$$M_{t(R)} = (E + \sum_{i_{jk} \geq 1}^{i_{jk} \leq n} \sum_{j=1}^{n} E_{i_{jk}j} + \cdots + \prod_{i_{jk} \geq 1n}^{i_{jk} \leq n} \prod_{j=n}^{1} E_{i_{jk}j})A,$$

由布尔矩阵的性质知

$$(E + \sum_{i_{jk} \geq 1}^{i_{jk} \leq n} \sum_{j=1}^{n} E_{i_{jk}j} + \cdots + \prod_{i_{jk} \geq 1n}^{i_{jk} \leq n} \prod_{j=n}^{1} E_{i_{jk}j})A = \sum_{i=1}^{n} A^{i},$$

即 Warshall 算法正确.

如二元关系的关系矩阵为

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

由 Warshall 算法知, 当 $j = 1$ 时,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (E + E_{21})(E + E_{11})A,$$

当 $j = 2$ 时,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (E + E_{22})(E + E_{12})(E + E_{21})(E + E_{11})A,$$

当 $j = 3$ 时,

$$A_3 = (E + E_{33})(E + E_{23})(E + E_{13})(E + E_{22})(E + E_{12})(E + E_{21})(E + E_{11})A,$$

展开得

$$A_3 = (E + E_{33} + E_{23} + E_{13} + E_{22} + E_{12} + E_{21} + E_{11})A,$$

由 $A = E_{33} + E_{23} + E_{12} + E_{21} + E_{11}$ 知

$$A^2 = (E_{33} + E_{23} + E_{12} + E_{21} + E_{11})^2 = E_{33} + E_{23} + E_{12} + E_{21} + E_{11} + E_{22} + E_{13},$$

由布尔矩阵的性质知

$$A + A^2 = E + E_{33} + E_{23} + E_{13} + E_{22} + E_{12} + E_{21} + E_{11},$$

即 $A_3 = A + A^2 + A^3 = M_{t(R)}$.

4　改进 Warshall 算法在有向图中的应用

给出一个带权有向图 $G = (v, E, w)$ 的带权矩阵为

$$A[i, j] = \begin{cases} W_{ij}, & \text{若 } \overline{v_i v_j} \in E, \\ \infty, & \text{反之}, \end{cases}$$

计算距离矩阵 $D = [d_{ij}]_{n \times n}$ (其中 d_{ij} 为从 v_i 到 v_j 的最短距离), 利用 Dijkstra 算法求距离矩阵, 其时间复杂度为 $O(n^3)$. 若利用如下的传递闭包简单改进 Warshall 算法, 其计算的时间复杂度也为 $O(n^3)$.

算法 2:

1. $D = A$;
2. for $j = 1$ to N;
3. for $i = 1$ to N;
4. for $k = 1$ to N;

5. $d_{ij} = \min\{d_{ij}, d_{ik} + d_{kj}\}$.

这显然与Floyd算法具有相同的形式

5 Warshall算法在语法分析中的应用

语法分析的任务是分析一个文法的句子结构, 设有一字母表 $V = \{A, B, C, D, e, d, f\}$. 假设文法 G 为(1)$A \to Af$; (2)$B \to Dde$; (3)$C \to e$; (4)$A \to B$; (5)$B \to De$; (6)$D \to Bf$.

R 为定义在 V 上的二元关系, $(x_i, x_j) \in R$ 表示从 x_i 出发用一条规则推出一串字符, 使其第一个字母恰好为 x_j, 说明每个字母连续使用文法可能推出的头字符. 其关系矩阵为

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

应用Warshall算法得

$$M_{t(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这说明应用给定的6条规则, 从 A 出发推导出的头字符有 A, B, D 三种可能, 而从 B 出发推导的头字符有 B, D 两种可能, 从 D 出发推导的头字符有 B, D 两种可能, 从 C 出发推导的头字符只可能为 e.

参考文献:

[1] 左孝凌, 李为槛, 刘永才. 离散数学[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1997. 119-127.

[2] 朱一清. 离散数学[M]. 北京: 电子工业出版社, 1998. 89-103.

[3] 李大友. 离散数学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002. 13-40.

[4] BERNARD KOLMAN. *Discrete mathematical structures*[M]. 北京: 清华大学出版社, Prentice-Hall International, Inc, 1997. 157-165.

[5] 刘贵龙. 模糊关系矩阵传递闭包的Warshall算法[J]. 模糊系统与数学, 2003, (1): 59-61.

Warshall's algorithm for transitive closures of binary relation and it's application

LIU Hong-bing[1,2], GUO Hong-jian[2], LI Hao[3]

(1. School of Computer Science and Technology, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China;

2. Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China;

3. Henan Provincial Institute of Scientific and Technical Information, Zhengzhou 450003, China)

Abstract: This paper introduces Warshall's algorithm for transitive closures. The validity of this algorithm is explained by the operation of Boolean matrices. The application of Warshall's algorithm in the field of Grammar Analysis and Graph Theory is discussed.

Key words: transitive closure; Warshall's Algorithm; Boolean transformation

责任编校: 张建合