信阳师范学院学报(自然科学版)
第15卷 第3期 2002年7月

Journal of Xinyang Teachers College
(Natural Science Edition) Vol. 15 No. 3 Jul. 2002

· 基础理论研究 ·

# 一个量子恒等式的初等证明

刘贻阁[1], 彭帮琦[2], 胡余旺[3]

(1. 高明市纪念中学, 广东 高明 528500; 2. 商城县教师进修学校, 河南 商城 465300;
3. 信阳师范学院 数学系, 河南 信阳 464000)

**摘 要**: 在量子群及其表示理论中, 一些含有参数 $v$ 的所谓量子恒等式起着重要的作用, 往往可以大大简化证明或推导的过程. 本文使用初等方法给出其中一个重要恒等式的证明.

**关键词**: 量子群; 量子数; 量子恒等式

**中图分类号**: O152.5 **文献标识码**: A **文章编号**: 1003-0972(2002)03-0255-03

## 0 引言

20世纪80年代以来, 量子群理论发展得相当迅速, 由于其深刻的物理学背景以及与其他数学分支的紧密联系, 引起许多背景不同的数学家的兴趣, 成为当前国际数学研究的热点之一. 特别是美国数学家 G. Lusztig 的一系列工作, 在以单位根为参数的量子群的表示理论与素特征的代数群的表示理论之间建立起极其深刻的内在联系, 使得代数群及其表示理论的研究和量子群及其表示理论的研究互相依托、互相渗透、互相推动, 从而呈现出蓬勃发展的新景象. 在量子群及其表示理论的研究中, 参数 $v$ (可以是单位根也可以不是单位根) 以及由此而定义的量子数是最基本的工具, 在理论证明和公式推导的过程中, 为了简化步骤, 需要建立许多含有参数 $v$ 和量子数的恒等式, 即所谓的量子恒等式, 它们在形式上类似于组合恒等式, 但其证明要复杂很多, 有些需要较高的技巧. 本文是采用初等方法对一个非常重要的量子恒等式进行证明, 并附带推导出两个量子恒等式

## 1 几个量子数的定义

定义1 设 $v$ 是参数(也叫未定元), $a$ 是整数, $b$ 是正整数, 定义量子数 $[a]$, $[b]!$, $\left[{a \atop b}\right]$ 如下:

$$[a]=\frac{v^a-v^{-a}}{v-v^{-1}},$$

$$[b]!=\prod_{h=1}^{b}\frac{v^h-v^{-h}}{v-v^{-1}},$$

$$\left[{a \atop b}\right]=\prod_{h=1}^{b}\frac{v^{a-h+1}-v^{-(a-h+1)}}{v^h-v^{-h}},\ a\geq b,$$

并规定: $[0]!=1$, $[-b]!=(-1)^b[b]!$,

$$\left[{a \atop 0}\right]=1,\ \left[{a \atop -b}\right]=0,\ \left[{a \atop b}\right]=0\ (a<b).$$

按照上面的定义, 对任意整数 $a$, $b$, 我们有三个量子数 $[a]$, $[b]!$, $\left[{a \atop b}\right]$. 实际上, 还可以定义其他的量子数, 因与本文无关, 这里就不再给出.

由定义1, 我们可以推出, 对任意正整数 $a$, 整数 $b$, 有下式成立.

$$\left[{a+b \atop b}\right]=\frac{[a+b]!}{[a]!\,[b]!},\ [b]!=[b][b-1]\cdots[2][1].$$

下面要给出的量子恒等式, 在量子群及其表示理论中起着非常重要的作用, 特别在量子群的典范基的证明过程中尤其重要.

命题2 设 $m$, $k$ 都是非负整数, $m\geq k$, $\delta$ 是正整数, 那么有如下恒等式

$$\sum_{0\leq i\leq\delta}(-1)^i\begin{bmatrix}k-1+i\\ i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ \delta-i\end{bmatrix}v^{-i(m-k)}=\begin{bmatrix}m-k\\ \delta\end{bmatrix}v^{k\delta} \tag{1}$$

## 2 命题2的证明

为了证明命题2, 我们需要几个引理.

引理3 设 $a$, $n$ 是整数, $n>0$, 那么

**收稿日期**: 2001-10-13
**作者简介**: 刘贻阁(1964-), 男, 学士, 中教一级, 现从事初等数学教学.

$$\begin{bmatrix} a+1 \\ n \end{bmatrix} = v^{-n}\begin{bmatrix} a \\ n \end{bmatrix} + v^{a-n+1}\begin{bmatrix} a \\ n-1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

**证明**　因为对任意整数 $a, b$, 我们有

$$v^{-b}[a]+v^{a}[b]$$
$$= v^{-b}\cdot\frac{v^{a}-v^{-a}}{v-v^{-1}}+v^{a}\cdot\frac{v^{b}-v^{-b}}{v-v^{-1}}$$
$$=\frac{v^{a-b}-v^{-a-b}+v^{a+b}-v^{a-b}}{v-v^{-1}}$$
$$=\frac{v^{a+b}-v^{-(a+b)}}{v-v^{-1}}=[a+b],$$

于是, $v^{-n}\begin{bmatrix} a \\ n \end{bmatrix}+v^{a-n+1}\begin{bmatrix} a \\ n-1 \end{bmatrix}$

$$=v^{-n}\cdot\frac{[a]!}{[n]!\,[a-n]!}+v^{a-n+1}\cdot\frac{[a]!}{[n-1]!\,[a-n+1]!}$$
$$=\frac{[a]!}{[n]!\,[a-n+1]!}\left(v^{-n}[a-n+1]+v^{a-n+1}[n]\right)$$
$$=\frac{[a]!\,[a+1]}{[n]!\,[a-n+1]!}$$
$$=\frac{[a+1]!}{[n]!\,[a-n+1]!}$$
$$=\begin{bmatrix} a+1 \\ n \end{bmatrix}.$$

证毕

**引理 4**　设 $x$ 是未定元, $m$ 是正整数, 那么有

$$\prod_{j=0}^{m-1}(1+v^{2j}x)=\sum_{i=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}v^{i(m-1)}x^{i} \qquad (3)$$

**证明**　对正整数 $m$ 作数学归纳法.

首先当 $m=1$ 时, (3) 式两端都等于 $1+x$.

下设 $m>1$, 并假设(3) 式当 $m-1$ 时成立, 那么由归纳假设及(2) 式, 我们有

$$\prod_{j=0}^{m-1}(1+v^{2j}x)=\prod_{j=0}^{m-1-1}(1+v^{2j}x)\cdot(1+v^{2(m-1)}x)$$
$$=\sum_{i=0}^{m-1}\begin{bmatrix} m-1 \\ i \end{bmatrix}v^{i(m-1-1)}x^{i}\cdot(1+v^{2(m-1)}x)$$
$$=\sum_{i=0}^{m-1}\begin{bmatrix} m-1 \\ i \end{bmatrix}v^{i(m-2)}x^{i}+\sum_{i=0}^{m-1}\begin{bmatrix} m-1 \\ i \end{bmatrix}v^{i(m-2)+2(m-1)}x^{i+1}$$
$$=\sum_{i=0}^{m-1}\begin{bmatrix} m-1 \\ i \end{bmatrix}v^{i(m-2)}x^{i}+\sum_{i=1}^{m}\begin{bmatrix} m-1 \\ i-1 \end{bmatrix}v^{(i-1)(m-2)+2(m-1)}x^{i}$$
$$=1+\sum_{i=1}^{m-1}\left(\begin{bmatrix} m-1 \\ i \end{bmatrix}v^{i(m-2)}+\begin{bmatrix} m-1 \\ i-1 \end{bmatrix}v^{(i-1)(m-2)+2(m-1)}\right)x^{i}+v^{m(m-1)}x^{m}$$
$$=1+\sum_{i=1}^{m-1}\left(\begin{bmatrix} m-1 \\ i \end{bmatrix}v^{-i}+\begin{bmatrix} m-1 \\ i-1 \end{bmatrix}v^{m-1-(i-1)}\right)v^{i(m-1)}x^{i}+v^{m(m-1)}x^{m}$$
$$=1+\sum_{i=1}^{m-1}\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}v^{i(m-1)}x^{i}+v^{m(m-1)}x^{m}$$
$$=\sum_{i=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}v^{i(m-1)}x^{i}$$

即当 $m$ 时(3) 式也成立, 由归纳法原理, (3) 式对一切正整数 $m$ 都成立.　证毕

**引理 5**　设 $x$ 是未定元, $k$ 是正整数, 那么有

$$\prod_{j=0}^{k-1}(1+v^{2j}x)^{-1}=\sum_{i\geq 0}(-1)^{i}\begin{bmatrix} k-1+i \\ i \end{bmatrix}v^{i(k-1)}x^{i} \qquad (4)$$

**证明**　因为由(3) 式, 有

$$\prod_{j=0}^{k-1}(1+v^{2j}x)^{-1}=\left(\prod_{j=0}^{k-1}(1+v^{2j}x)\right)^{-1}=\left(\sum_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}v^{i(k-1)}x^{i}\right)^{-1},$$

故可令上式的幂级数(关于 $x$ 的)展开式为 $\sum_{i\geq 0}a_{i}x^{i}$, 那么有

$$\left(\sum_{i\geq 0}a_{i}x^{i}\right)\left(\sum_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}v^{i(k-1)}x^{i}\right)=1,$$

比较两边的系数, 有

$$\begin{cases} a_0=1, \\ a_0\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}v^{k-1}+a_1=0, \\ a_0\begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix}v^{2(k-1)}+a_1\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}v^{k-1}+a_2=0, \\ \quad\vdots \\ a_0\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}v^{i(k-1)}+a_1\begin{bmatrix} k \\ i-1 \end{bmatrix}v^{(i-1)(k-1)} \\ \quad +\cdots+a_{i-1}\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}v^{k-1}+a_i=0 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

解之, 得到

$$a_i=(-1)^{i}\begin{bmatrix} k-1+i \\ i \end{bmatrix}v^{i(k-1)},\ i\geq 0,$$

从而(4) 式成立.　证毕

**引理 6**　设 $x$ 是未定元, $m, k$ 都是正整数, $m>k$, 那么有

$$\prod_{j=k}^{m-1}(1+v^{2j}x)=\sum_{i=0}^{m-k}\begin{bmatrix} m-k \\ i \end{bmatrix}v^{i(m-k-1)+2ik}x^{i} \qquad (5)$$

**证明**　对 $m-k$ 作数学归纳法. 当 $m-k=1$ 时, (5) 式两端都等于 $1+v^{2k}x$. 下设 $m-k>1$, 并假设当 $m-k=r\ (r>1)$ 时, (5) 式成立, 即有

$$\prod_{j=k}^{k+r-1}(1+v^{2j}x)=\sum_{i=0}^{r}\begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix}v^{i(r-1)+2ik}x^{i},$$

那么由归纳假设及(2) 式, 当 $m-k=r+1$ 时, 有

$$\prod_{j=k}^{k+r+1-1}(1+v^{2j}x)=\prod_{j=k}^{k+r-1}(1+v^{2j}x)\cdot(1+v^{2(k+r)}x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{r}\begin{bmatrix} r\\ i\end{bmatrix} v^{i(r-1)+2ik}x^{i}\cdot(1+v^{2(k+r)}x)\\
&= \sum_{i=0}^{r}\begin{bmatrix} r\\ i\end{bmatrix} v^{i(r-1)+2ik}x^{i}\\
&\quad+\sum_{i=0}^{r}\begin{bmatrix} r\\ i\end{bmatrix} v^{i(r-1)+2ik+2(k+r)}x^{i+1}\\
&= \sum_{i=0}^{r}\begin{bmatrix} r\\ i\end{bmatrix} v^{i(r-1)+2ik}x^{i}\\
&\quad+\sum_{i=1}^{r+1}\begin{bmatrix} r\\ i-1\end{bmatrix} v^{(i-1)(r-1)+2(i-1)k+2(k+r)}x^{i}\\
&= 1+\sum_{i=1}^{r}\left(\begin{bmatrix} r\\ i\end{bmatrix} v^{i(r-1)+2ik}\right.\\
&\quad\left.+\begin{bmatrix} r\\ i-1\end{bmatrix} v^{(i-1)(r-1)+2(i-1)k+2(k+r)}\right)x^{i}\\
&\qquad+v^{r(r-1)+2rk+2(k+r)}x^{r+1}\\
&= 1+\sum_{i=1}^{r}\left(\begin{bmatrix} r\\ i\end{bmatrix} v^{-i}+\begin{bmatrix} r\\ i-1\end{bmatrix} v^{r-i+1}\right)v^{ir+2ik}x^{i}\\
&\quad+v^{r(r-1)+2rk+2(k+r)}x^{r+1}\\
&= 1+\sum_{i=1}^{r}\begin{bmatrix} r+1\\ i\end{bmatrix} v^{i(r+1-1)+2ik}x^{i}\\
&\quad+v^{r(r-1)+2rk+2(k+r)}x^{r+1}\\
&= \sum_{i=0}^{r+1}\begin{bmatrix} r+1\\ i\end{bmatrix} v^{i(r+1-1)+2ik}x^{i},
\end{aligned}
$$

**也就是说当** $m-k=r+1$ **时**(5) **式成立, 由归纳法原理, 对一切正整数** $m>k$, (5) **式成立 .** **证毕**

**命题** 2 **的证明**

**如果** $m=k=0$ **或** $m=k>0$ **或** $m>k=0$, (1) **式显然成立, 下设** $m>k>0$, **因为**

$$
\prod_{j=0}^{k-1}(1+v^{2j}x)^{-1}\cdot\prod_{j=0}^{m-1}(1+v^{2j}x)=\prod_{j=k}^{m-1}(1+v^{2j}x),
$$

**故由**(3)、(4)、(5), **可得到如下式**:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\geq 0}(-1)^{i}\begin{bmatrix} k-1+i\\ i\end{bmatrix} v^{i(k-1)}x^{i}\cdot\sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix} m\\ j\end{bmatrix} v^{j(m-1)}x^{j}\\
&=\sum_{\delta=0}^{m-k}\begin{bmatrix} m-k\\ \delta\end{bmatrix} v^{\delta(m-k-1)+2\delta k}x^{\delta},
\end{aligned}
$$

**比较两边** $x^{\delta}$ **的系数, 则有**

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0\leq i\leq\delta}(-1)^{i}\begin{bmatrix} k-1+i\\ i\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m\\ \delta-i\end{bmatrix} v^{i(k-1)+(\delta-i)(m-1)}\\
&=\begin{bmatrix} m-k\\ \delta\end{bmatrix} v^{\delta(m-k-1)+2\delta k},
\end{aligned}
$$

**消去两边的同类项** $v^{\delta(m-1)}$, **即得**

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0\leq i\leq\delta}(-1)^{i}\begin{bmatrix} k-1+i\\ i\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m\\ \delta-i\end{bmatrix} v^{-i(m-k)}\\
&\qquad=\begin{bmatrix} m-k\\ \delta\end{bmatrix} v^{k\delta}.
\end{aligned}
$$

**由**(1) **可推出两个量子恒等式 .**

**用** $v^{-1}$ **代替**(1) **式中的** $v$, **我们有**

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0\leq i\leq\delta}(-1)^{i}\begin{bmatrix} k-1+i\\ i\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m\\ \delta-i\end{bmatrix} v^{i(m-k)}\\
&\qquad=\begin{bmatrix} m-k\\ \delta\end{bmatrix} v^{-k\delta}. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

**这里**, $m, k, \delta$ **同命题** 2 **的假设 .** **证毕**

**我们还有**

**推论** 7　$m, k$ **是非负整数**, $m\geq k$, $\delta, n$ **是正整数, 那么有**

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0\leq i\leq\delta}(-1)^{i}\begin{bmatrix} k-1+i\\ i\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m+n\\ \delta-i\end{bmatrix} v^{i(m-k-n)}\\
&\qquad=\sum_{0\leq t\leq\delta, n}\begin{bmatrix} m-k\\ \delta-t\end{bmatrix}\begin{bmatrix} n\\ t\end{bmatrix} v^{-k(\delta-t)-n\delta+t(m+n)} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

**证明　因为**

$$
\prod_{j=0}^{m+n-1}(1+v^{2j}x)=\prod_{j=0}^{n-1}(1+v^{2j}x)\cdot\prod_{j=n}^{m+n-1}(1+v^{2j}x)
$$

**故由**(3) **式和**(5) **式**(**用** $v^{-1}$ **代替** $v$), **我们有**

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\delta=0}^{m+n}\begin{bmatrix} m+n\\ \delta\end{bmatrix} v^{-\delta(m+n-1)}x^{\delta}\\
&\quad=\sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix} n\\ i\end{bmatrix} v^{-i(n-1)}x^{i}\cdot\\
&\quad\cdot\sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix} m\\ j\end{bmatrix} v^{-j(m-1)+2jn}x^{j}\\
&\quad=\sum_{\delta=0}^{m+n}\left(\sum_{0\leq t\leq\delta, n}v^{-n\delta+t(m+n)}\begin{bmatrix} m\\ \delta-t\end{bmatrix}\begin{bmatrix} n\\ t\end{bmatrix}\right)\\
&\quad\cdot v^{-\delta(m+n-1)}x^{\delta},
\end{aligned}
$$

**比较两边** $x^{\delta}$ **的系数, 可以看出**

$$
\begin{bmatrix} m+n\\ \delta\end{bmatrix}=\sum_{0\leq t\leq\delta, n}v^{-n\delta+t(m+n)}\begin{bmatrix} m\\ \delta-t\end{bmatrix}\begin{bmatrix} n\\ t\end{bmatrix},
$$

**于是, 由**(6) **式, 我们得到**

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0\leq i\leq\delta}(-1)^{i}\begin{bmatrix} k-1+i\\ i\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m+n\\ \delta-i\end{bmatrix} v^{i(m-k-n)}\\
&\quad=\sum_{0\leq i\leq\delta}(-1)^{i}\begin{bmatrix} k-1+i\\ i\end{bmatrix}\\
&\quad\cdot\sum_{0\leq t\leq\delta-i, n}v^{-n(\delta-i)+t(m+n)}\begin{bmatrix} m\\ \delta-i-t\end{bmatrix}\begin{bmatrix} n\\ t\end{bmatrix} v^{i(m-k-n)}\\
&\quad=\sum_{0\leq t\leq\delta, n}\left(\sum_{0\leq i\leq\delta-t}(-1)^{i}\begin{bmatrix} k-1+i\\ i\end{bmatrix}\right.\\
&\quad\left.\cdot\begin{bmatrix} m\\ \delta-t-i\end{bmatrix} v^{i(m-k)}\right)v^{-n\delta+t(m+n)}\begin{bmatrix} n\\ t\end{bmatrix}\\
&\quad=\sum_{0\leq t\leq\delta, n}\begin{bmatrix} m-k\\ \delta-t\end{bmatrix}\begin{bmatrix} n\\ t\end{bmatrix} v^{-k(\delta-t)-n\delta+t(m+n)}
\end{aligned}
$$

**即**(7) **式成立 .** **证毕**

(**下转第** 276 **页**)

[J]. J ApplMath, 1976, (31): 504-510.
[5] 周毓荣 包围多个奇点的极限环的个数[J]. 系统科学与数学, 1998, 18(3): 341-346.
[6] ZHOU Jin. *On the existence and uniqueness of periodic solution for Lienard type equations* [J]. Nonlinear Analysis, 1996, (1): 1463-1470.
[7] ZHOU Jin. *On the nonexistence of periodic solutions for Lienard-type equations*[J]. Systems Science and Mathematical Science, 1999, 12(2): 185-192.
[8] 周毓荣, 韩茂安 包围多个奇点的极限环的唯一性与唯二性[J]. 数学学报, 1993, 36(4): 505-515.

## The existence of periodic solutions for generalized Lienard-type equation

**ZHUO Xiang-lai**
(Dept. of Basic Courses, Shandong University of Science and Technology, Tai'an 271019, China)

**Abstact**: The generalized Lienard-type equation
$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + f_3(x)\dot{x}^3 + g(x) = 0$$
is discussed, and some sufficient conditions to guarantee the oscillating of its any non-trivial solution are obtained. Furthermore, the existence of periodic solution is proved.

**Key words**: oscillating; periodic solution; positive definite function
**责任编校: 郭红建**

---

(上接第 257 页)

**参考文献:**

[1] LUSZTIG G. *Introduction to guantam groups*[M]. Progress in Mafhematics 110, Birkhauser, Boston. Basel Berlin, 1993.
[2] LUSZTIG G. *Quanttum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*[J]. Adv in Math, 1988, 70: 237-249.
[3] LUSZTIG G. *On guantum groups*[J]. J Algebra, 1990, 131: 466-475.
[4] JIMBO M. *A q-difference analogue of U(g) and the Yang-Baxter eguation*[J]. Lett Math Phys, 1985, 10: 63-69.

## A primary proof of a quantum equation

**LIU Yi-ge[1], PENG Bang-qi[2], HU Yu-wang[3]**
(1. Gaoming Memorial Middle School, Gaoming 528500, China;
2. Shangcheng Teachers Training School, Shangcheng 465300, China;
3. Dept. of Math., Xinyang Teachers College, Xinyang 464000, China)

**Abstract**: Some quantum equations with parameter play an important role in the theory of quantam group and their representations, and can always simplify process of proofs. In this paper, we use primary method to prove an important guantum equation.

**Key words**: quantam group; quantum number; quantum equation
**责任编校: 郭红建**