

·基础理论研究·

$M/E_k/1$ 排队模型研究

阿合买提江·依明江

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘 要:首先运用 C_0 -半群理论证明 $M/E_k/1$ 排队模型有唯一的概率瞬态解, 然后研究对应于 $M/E_k/1$ 排队模型的主算子的谱特征, 最后得到在一定的条件下该模型的时间依赖解强收敛于该模型的稳态解.

关键词: $M/E_k/1$ 排队模型; C_0 -半群; 时间依赖解; 谱

中图分类号: O177.7; O177.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-0972(2008)04-0484-04

Studies on the $M/E_k/1$ Queueing Model

AHMETJAN Im in jan

(College of Mathematics and Systems Science, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

Abstract: It is firstly proved by using C_0 -semigroup theory that the $M/E_k/1$ queueing model has a unique positive time dependent solution which satisfies probability condition, then the spectral properties of the operator corresponding to this model is studied. Finally it is given that under certain condition the time dependent solution of the model converges strongly to the steady state solution of the model.

Key words: $M/E_k/1$ queueing model; C_0 -semigroup; time dependent solution; spectrum

0 引言

$M/E_k/1$ 表示顾客以到达率 λ 的 Poisson 过程到达系统, 服务台的服务时间服从参数为 μ 的 k 阶 Erlang 分布, 系统中只有 1 个服务台, 服务台的服务规则是先到先服务, 服务时间与顾客到达相互独立.

2006 年英国学者 Griffiths, Leonenko 与 Williams^[1] 建立了 $M/E_k/1$ 排队模型并运用概率母函数研究了该模型的时间依赖解, 得到了概率母函数的表达式, 即得到了该模型时间依赖解的存在性. 最后, 在特殊情况下, 讨论了该排队系统队长的数值计算问题. 正如该文中他们所说“研究排队模型的时间依赖解是难度大, 但非常重要的问题”. 本文运用泛函分析理论与方法对 $M/E_k/1$ 排队模型进行动态分析. 首先将该排队模型转化成 Banach 空间中的抽象 Cauchy 问题, 然后运用 Hille-Yosida 定理, Phillips 定理与 Fattorini 定理证明该模型存在唯一的概率瞬态解. 第三步讨论该模型主算子的谱特征, 最后得到在一定的条件下该模型时间依赖解强收敛于该模型的稳态解.

$M/E_k/1$ 排队模型可写为^[1]

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + k\mu p_{1,1}(t), \quad n=0, \quad (1)$$

$$\frac{dp_{1,s}(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu) p_{1,s}(t) + k\mu p_{1,s+1}(t), \quad 1 \leq s \leq k-1, \quad (2)$$

$$\frac{dp_{1,k}(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu) p_{1,k}(t) + k\mu p_{2,1}(t) + \lambda p_0(t), \quad s=k, \quad (3)$$

$$\frac{dp_{n,s}(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu) p_{n,s}(t) + k\mu p_{n,s+1}(t) + \lambda p_{n-1,s}(t), \quad n \geq 2, \quad 1 \leq s \leq k-1, \quad (4)$$

$$\frac{dp_{n,k}(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu) p_{n,k}(t) + k\mu p_{n+1,1}(t) + \lambda p_{n-1,k}(t), \quad n \geq 2, \quad s=k, \quad (5)$$

$$p_0(0) = 1, \quad p_{n,s}(0) = 0, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq s \leq k \quad (6)$$

其中: λ 表示顾客的到达率; μ 表示服务员的服务率; $p_{n,s}(t)$ 表示在时刻 t 系统里有 n 个顾客, 其中一个顾客在系统的第 s 相位里接受服务的概率.

为简单起见, 记

收稿日期: 2007-10-25; 修订日期: 2008-04-15; *. 通讯联系人, E-mail: ahmetjan69@hotmail.com

基金项目: 新疆维吾尔自治区科学技术厅基金项目 (200623106)

作者简介: 阿合买提江·依明江 (1969-), 男, 新疆察布查尔人, 讲师, 硕士, 主要研究方向: 排队模型的动态分析.

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & k\mu & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + k\mu) & k\mu & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + k\mu) & k\mu \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

选择 $l^1 = \{p = (p_0, p_{1,1}, \dots, p_{1,k}, p_{2,1}, \dots, p_{2,k}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,k}, \dots) \mid p = |p_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k |p_{n,s}| < \infty\}$ 为状态空间. 如果取 A 与 U 的定义域为 $D(A) = D(U) = l^1$, 那么方程 (1)-(6) 可改写为 Banach 空间 l^1 中的抽象 Cauchy 问题:

$$\frac{dp(t)}{dt} = (A + U)p(t), \quad t \geq 0, \quad (7)$$

$$p(0) = (1, 0, 0, \dots). \quad (8)$$

1 系统 (7)-(8) 的适定性

定理 1 $A + U$ 生成某个正压缩 C_0 -半群 $T(t)$.

证明 首先证明当 $\gamma > -\lambda$ 时 $(\gamma I - A)^{-1}$ 存在并且

$$(\gamma I - A)^{-1} = \frac{1}{\gamma + \lambda}. \quad \text{由此推出 } A \text{ 生成某个 } C_0\text{-半群.}$$

其次用 C_0 -半群的扰动理论得到 $A + U$ 生成某个 C_0 -半群 $T(t)$, 然后我们证明 $T(t)$ 是一个正算子, 最后我们证明 $T(t)$ 是压缩算子.

当 $\gamma \neq -\lambda$, $\gamma \neq -(\lambda + k\mu)$ 时, 由 A 的表达式与算子逆的定义求出

$$(\gamma I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma + \lambda} & \frac{k\mu}{(\gamma + \lambda)(\gamma + \lambda + k\mu)} & \frac{(k\mu)^2}{(\gamma + \lambda)(\gamma + \lambda + k\mu)^2} & \dots \\ 0 & \frac{1}{\gamma + \lambda + k\mu} & \frac{k\mu}{(\gamma + \lambda + k\mu)^2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma + \lambda + k\mu} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (9)$$

对任意 $p \in l^1$, 由 (9) 有 (不妨设 $\gamma > -\lambda$):

$$(\gamma I - A)^{-1}p \leq \frac{1}{\gamma + \lambda} |p_0| +$$

$$\left\{ \frac{k\mu}{(\gamma + \lambda)(\gamma + \lambda + k\mu)} + \frac{1}{\gamma + \lambda + k\mu} \right\} |p_{1,1}| + \dots +$$

$$\left\{ \frac{(k\mu)^{k+1}}{(\gamma + \lambda + k\mu)(\gamma + \lambda + k\mu)^{k+1}} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(k\mu)^{i-1}}{(\gamma + \lambda + k\mu)^i} \right\} |p_{2,1}| + \dots +$$

$$\left\{ \frac{(k\mu)^{(n-1)k+1}}{(\gamma + \lambda + k\mu)(\gamma + \lambda + k\mu)^{(n-1)k+1}} + \sum_{i=1}^{(n-1)k+1} \frac{(k\mu)^{i-1}}{(\gamma + \lambda + k\mu)^i} \right\} |p_{n,1}| + \dots +$$

$$\left\{ \frac{(k\mu)^{nk}}{(\gamma + \lambda + k\mu)(\gamma + \lambda + k\mu)^{nk}} + \sum_{i=1}^{nk} \frac{(k\mu)^{i-1}}{(\gamma + \lambda + k\mu)^i} \right\} |p_{n,k}| + \dots \quad (10)$$

通过观察任意 $|p_{n,s}|$ 的系数, 发现

$$\frac{(k\mu)^{(n-1)k+s}}{(\gamma + \lambda)(\gamma + \lambda + k\mu)^{(n-1)k+s}} + \sum_{i=1}^{(n-1)k+s} \frac{(k\mu)^{i-1}}{(\gamma + \lambda + k\mu)^i} = \frac{1}{\gamma + \lambda},$$

$$n \geq 1, 1 \leq s \leq k, \quad (11)$$

合并 (11) 与 (10) 式, 得出 $|(\gamma I - A)^{-1}p| \leq \frac{1}{\gamma + \lambda} |p|$.

如果我们取特殊的 $p' = (1, 0, 0, \dots) \in l^1$, 由 (9) 得到

$$(\gamma I - A)^{-1}p' = \frac{1}{\gamma + \lambda} p'. \quad (12)$$

因此, 由 (12) 式与算子范数的定义可知

$$(\gamma I - A)^{-1} = \frac{1}{\gamma + \lambda}.$$

此式说明: 当 $\gamma > -\lambda$ 时 $(\gamma I - A)^{-1}$ 存在并且

$$(\gamma I - A)^{-1} = \frac{1}{\gamma + \lambda}. \quad \text{因为 } D(A) = l^1, \text{ 所以由 Hille-Yosida 定理}^{[2]} \text{ 推出 } A \text{ 生成某个 } C_0\text{-半群.}$$

第二步, 我们证明 U 是 l^1 上的有界线性算子.

由 U 的定义很容易计算出, 对任意的 $p \in l^1$ 有

$$Up = | \lambda p_0 | + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k | \lambda p_{n,s} | = \lambda |p| \Rightarrow \|U\| = \lambda. \quad (13)$$

此式说明 U 是有界算子. 不难验证 U 是一个线性算子, 从而 U 是有界线性算子.

由 C_0 -半群的扰动定理^[2]知 $A + U$ 生成某个 C_0 -半群 $T(t)$. 此外由 (9) 可知 $(\gamma I - A)^{-1}$ 是正算子, 而 U 是正算子. 注意到

$$(\gamma I - A - U)^{-1} = [I - (\gamma I - A)^{-1}U]^{-1}(\gamma I - A)^{-1}. \quad (14)$$

由 (12) 和 (13) 知道当 $|(\gamma I - A)^{-1}U| \leq |(\gamma I - A)^{-1}| \|U\| = \frac{\lambda}{\gamma + \lambda} < 1$ 时, $[I - (\gamma I - A)^{-1}U]^{-1}$ 存在, 并且

$$[I - (\gamma I - A)^{-1}U]^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} [(\gamma I - A)^{-1}U]^m.$$

所以 $[I - (\gamma I - A)^{-1}U]^{-1}$ 是一个正算子. 由 (9) 和 (14) 可知 $(\gamma I - A - U)^{-1}$ 是一个正算子. 从而由

$$T(t)p = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} e^{-\gamma t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma^m \mathcal{V}^{2m} [(\gamma I - A - U)^{-1}]^m}{m!} p$$

知道 $T(t)$ 是一个正算子. 此外, 结合 (12), (13) 与 (14) 估计出

$$\begin{aligned} (\gamma I - A - U)^{-1} &\leq \\ \frac{1}{1 - (\gamma I - A)^{-1} U} (\gamma I - A)^{-1} &= \frac{1}{\gamma}. \end{aligned}$$

此式表明^[2] $T(t) \leq 1$, 即 $T(t)$ 是压缩算子. 证毕

在 l^1 中引入集合 $Y = \{p \mid p = (p_0, p_{1,1}, \dots, p_{1,k}, p_{2,1}, \dots, p_{2,k}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{n,k}, \dots), p_0 \geq 0, p_{n,s} \geq 0, n \geq 1, s = 1, 2, \dots, k\}$, 则 Y 是 l^1 中的正锥. 由于 l^1 的共轭空间为 $l^\infty = \{q^* \mid q^* = (q_0^*, q_{1,1}^*, q_{1,2}^*, \dots, q_{1,k}^*, q_{2,1}^*, q_{2,2}^*, \dots), |||q^*||| = \sup\{|q_0^*|, \sup_{1 \leq n \leq \infty} \sup_{1 \leq s \leq k} |q_{n,s}^*|\} < \infty\}$ 对 $p \in D(A) \cap Y$, 取 $q^* = p$ (1, 1, ...), 则 $q^* \in l^\infty$ 并且

$$\begin{aligned} p, q^* &= (p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k p_{n,s}) p = \\ p^2 &= |||q^*|||^2. \end{aligned}$$

对这种 $p \in D(A) \cap Y$ 与 $q^* \in l^\infty$ 有 $(A+U)p, q^* = 0$ 此式表明 $A+U$ 对集合 $\theta(p) = \{q^* \in l^1 \mid p, q^* = p^2 = |||q|||^2\}$ 是保守算子, 所以由 Fattorini 定理^[2] 得到以下结果:

定理 2 $T(t)$ 对 $D(A^2)$ 中的初值是等距算子. 特别地, 对系统 (7)-(8) 的初值满足:

$$T(t)p(0) = p(0), \quad \forall t \in [0, \infty).$$

结合定理 1 与定理 2 得到本节的主要结果:

定理 3 系统 (7)-(8) 存在唯一的概率瞬态解 $p(t)$ 满足:

$$p(t) = 1, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

证明 因为 $p(0) = (1, 0, 0, 0, \dots) \in D(A) \cap Y$, 所以由定理 1 和文献 [2] 中定理 11 可知系统 (7)-(8) 存在唯一的非负解且把它可表示为 $p(t) = T(t)p(0) = T(t)(1, 0, 0, 0, \dots)$. 此式与定理 2 结合后, 得到 $p = T(t)p(0) = p(0) = 1, \quad \forall t \in [0, \infty)$. 此式刚好反映 $p(t)$ 的实际背景. 证毕

2 系统 (7)-(8) 解的渐近性质

引理 1 若 $k\mu > \lambda$, 则 $\{Y \in C \mid |Y + \lambda + k\mu| > \lambda + k\mu\}$ 属于算子 $A+U$ 的预解集.

证明 由 (9) 知对任意 $p \in l^1$, 有

$$\begin{aligned} (\gamma I - A)^{-1} p &\leq \frac{1}{|\gamma + \lambda|} |p_0| + \\ &\left\{ \frac{k\mu}{|\gamma + \lambda| (\gamma + \lambda + k\mu)} + \right. \\ &\left. \frac{1}{|\gamma + \lambda + k\mu|} \right\} |p_{1,1}| + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{(k\mu)^k}{|\gamma + \lambda| (\gamma + \lambda + k\mu)^k} + \right. \\ &\sum_{i=1}^k \frac{(k\mu)^{i-1}}{|\gamma + \lambda + k\mu|^i} \left. \right\} |p_{1,k}| + \dots + \\ &\left\{ \frac{(k\mu)^{(n-1)k+1}}{|\gamma + \lambda| (\gamma + \lambda + k\mu)^{(n-1)k+1}} + \right. \\ &\sum_{i=1}^{(n-1)k+1} \frac{(k\mu)^{i-1}}{|\gamma + \lambda + k\mu|^i} \left. \right\} |p_{n,1}| + \dots + \\ &\left\{ \frac{(k\mu)^{nk}}{|\gamma + \lambda| (\gamma + \lambda + k\mu)^{nk}} + \right. \\ &\sum_{i=1}^{nk} \frac{(k\mu)^{i-1}}{|\gamma + \lambda + k\mu|^i} \left. \right\} |p_{n,k}| + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

容易验证 $\forall n \geq 1, 1 \leq s \leq k$ 有

$$\begin{aligned} (k\mu)^{(n-1)k+s-1} |\gamma + \lambda + k\mu| &< \\ (k\mu)^{(n-1)k+s} + (k\mu)^{(n-1)k+s-1} |\gamma + \lambda|, \end{aligned}$$

这蕴含 $|p_{n,s}|$ 的系数大于 $|p_{n,s-1}|$ 和 $|p_{n-1,s}|$ 的系数, 从而由 (15) 推出

$$\begin{aligned} (\gamma I - A)^{-1} p &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(k\mu)^{nk}}{|\gamma + \lambda| (\gamma + \lambda + k\mu)^{nk}} + \right. \\ &\sum_{s=1}^{nk} \frac{(k\mu)^{s-1}}{|\gamma + \lambda + k\mu|^s} \left. \right\} (|p_0| + |p_{1,1}| + \dots + \\ &|p_{1,k}| + |p_{2,1}| + \dots + \\ &|p_{2,k}| + \dots + |p_{n,1}| + \dots + |p_{n,k}| + \dots) = \\ &\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(k\mu)^{s-1}}{|\gamma + \lambda + k\mu|^s} (|p_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k |p_{n,s}| < \infty) = \\ &\frac{1}{|\gamma + \lambda + k\mu| - k\mu} p. \end{aligned} \quad (16)$$

由 (13) 和 (16) 知道, 当 γ 满足

$$|\gamma + \lambda + k\mu| > \lambda + k\mu \quad (17)$$

时, 不等式 $(\gamma I - A)^{-1} U \leq (\gamma I - A)^{-1} U \leq \frac{\lambda}{|\gamma + \lambda + k\mu| - k\mu} < 1$ 成立, 表明对满足 (17) 的所有 γ , $[I - (\gamma I - A)^{-1} U]^{-1}$ 存在并且有界. 从而由 (16) 与 (14) 可知道, 对满足 (17) 的所有 γ , $(\gamma I - A - U)^{-1}$ 存在并且有界, 即引理的结论成立. 证毕

引理 2 0 是 $A+U$ 的几何重数为 1 的特征值.

证明 解方程 $(A+U)p = 0$, 可以归纳出:

$$\begin{aligned} p_{n,s} &= \left\{ \left[\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{(n-i)k+s-1}{i-1} \right] \rho^i (1 + \right. \\ &\left. \rho)^{(n-i)k+s-i} \right\} p_0, \quad n \geq 1, 1 \leq s \leq k \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\frac{\lambda}{k\mu} = \rho$, 若取 $p_0 > 0$, 用数学归纳法可以证明: $p_{n,s} > 0, n \geq 1, 1 \leq s \leq k$

引入 $p_{n,s}$ 的母函数^[3] $H(z)$ 如下

$$\begin{aligned} H(z) &= p_0 + \sum_{s=1}^k H_s(z) = \\ p_0 &+ \sum_{s=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,s} z^n, \quad |z| < 1, \end{aligned}$$

$$H_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,s} z^n.$$

求出:

$$\begin{aligned} H(z) &= p_0 + \sum_{s=1}^k H_s(z) = \\ p_0 &+ \sum_{s=1}^k \frac{\rho z(1-z)(\rho+1-\rho z)^{s-1} p_0}{1-z(\rho+1-\rho z)^k} = \\ &= \frac{(1-z)p_0}{1-z(\rho+1-\rho z)^k}. \end{aligned}$$

由 L'Hospital 法则容易算出

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} H(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z)p_0}{1-z(\rho+1-\rho z)^k} = \\ &= \frac{\lim_{z \rightarrow 1} -p_0}{\lim_{z \rightarrow 1} -(\rho+1-\rho z)^k - z(\rho+1-\rho z)^{k-1}(-k\rho)} = \\ &= \frac{-p_0}{-1+k\rho} = \frac{p_0}{1-\frac{\lambda}{\mu}}. \\ \Rightarrow p_0 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^K p_{n,s} = \frac{p_0}{1-\frac{\lambda}{\mu}}. \end{aligned}$$

此式说明 0 是 $A+U$ 的特征值. 此外, 由 (18) 知道对应于 0 的特征向量构成一维的向量空间, 即 0 的几何重数为 1. 证毕

引理 3 0 是 $(A+U)^*$ 的特征值.

证明 因为 l^1 的共轭空间 l^∞ , 而 $(A+U)^*$ 是 $A+U$ 的转置矩阵, 即

$$(A+U)^* = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ k\mu & -(\lambda+k\mu) & \dots & 0 \\ 0 & k\mu & -(\lambda+k\mu) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

所以考虑 $(A+U)^* q^* = 0$, 很容易看出 $q^* = (1 \ 1 \ 1 \ \dots)^T$ 是该方程的一个解. 这表明 0 是 $(A+U)^*$ 的特征值. 证毕

如果能证明 0 是 $(A+U)^*$ 的代数重数为 1 的特征值, 那么由定理 1, 引理 2, 引理 3 和文献 [2] 中的定理 14 得到本节的主要结果:

定理 4 若 $\rho < 1$ 并且 0 是 $(A+U)^*$ 的代数重数为 1 的特征值, 则系统 (7)-(8) 的时间依赖解 $p(t)$ 强收敛于该系统的稳态解, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p$, 其中 p 是引理 3 中的特征向量.

在文献 [4] 中作者通过直接估计对应于一类可靠性模型的主算子的预解式得到了该模型的时间依赖解强渐近稳定的. 由此可见, 本文的结果区别于文献 [4] 中的结果.

参考文献:

- [1] Griffiths J D, Leonenko G M, Williams J E. The transient Solution to $M/E_k/1$ Queue[J]. Operations Research (S0167-6377), 2006, 34: 349-354.
- [2] Geni G, Li X Z, Zhu G T. Functional Analysis Method in Queueing Theory[M]. Hertfordshire: Research Information Ltd, 2001.
- [3] 曹汝成. 组合数学 [M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2000.
- [4] 仲彦军, 张 萍. 冷备状态下两个相同部件并联的可修系统解的渐近性质 [J]. 信阳师范学院学报: 自然科学版, 2006, 19(2): 141-143.

责任编辑: 郭红建