

·基础理论研究·

惯性矩(积)的转轴公式的图解分析

李建楠, 陈 哲, 董向伟

(信阳师范学院 建筑工程系, 河南 信阳 464000)

摘 要: 介绍了惯性矩(积)的转轴公式的图解分析方法, 并用此方法确定主惯性矩和主惯性轴的位置.

关键词: 惯性矩; 惯性积; 主惯性轴; 主惯性矩

中图分类号: O343.5 文献标识码: A 文章编号: 1003-0972(2005)02-0143-02

1 转轴公式的解析

假设截面对于通过其上任意一点 O 的两坐标轴 x, y 的惯性矩和惯性积分别为 I_x, I_y 和 I_{xy} . 若坐标轴 x, y 绕 O 点逆时针旋转 α 角至 x_1, y_1 位置, 则该截面对于新坐标系的 x_1, y_1 轴的惯性矩和惯性积分别为 I_{x_1}, I_{y_1} 及 $I_{x_1y_1}$. 由惯性矩及惯性积的转轴公式可知:

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha, \quad (a)$$

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha, \quad (b)$$

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha, \quad (c)$$

联立 (a)、(c) 及 (b)、(c) 可分别得到:

$$\left(I_{x_1} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x_1y_1}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2,$$

$$\left(I_{y_1} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x_1y_1}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2.$$

由此可见, 若将 I_{x_1}, I_{y_1} 及 $I_{x_1y_1}$ 分别视为关于 α 的变量, 则它们均满足圆的解析表达式. 故可做出两个相互重合的惯性矩(积)圆, 以下简称惯性圆.

2 转轴公式惯性圆的绘制方法

以惯性矩为横轴, 以惯性积为纵轴建立坐标系 gof . 如图 1. 在坐标系中按选定的比例尺, 量取 $OF_1 = I_x, D_1F_1 = I_{xy} (I_{xy} > 0)$, 得 D_1 点, 再量取 $OF_2 = I_y, D_2F_2 = I_{xy}$ 得 D_2 点. 连接 D_1 与 D_2 两点与 g 轴相交于 C 点, 以 C 点为圆心, 以 CD_1 为半径 R 作圆, 可以

得出, 该圆圆心 C 坐标为 $(\frac{I_x + I_y}{2}, 0)$, 半径 $R =$

$\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$. 当 $I_{xy} < 0$ 时, D_1F_1 应画在 g 轴下面且 $D_1F_1 = -I_{xy}, D_2F_2$ 应画在 g 轴上面且 $D_2F_2 = -I_{xy}$. 但 $D_1(I_x, I_{xy})$ 和 $D_2(I_x, -I_{xy})$ 的坐标保持不变.

3 任意角度惯性矩、惯性积与惯性圆的对应关系

若将直径 D_1D_2 绕 C 点逆时针旋转 2α 角, 则与该圆交于 E_1, E_2 两点 (见图 1), 则 E_1, E_2 分别满足 $E_1(I_{x_1}, I_{x_1y_1}), E_2(I_{y_1}, -I_{x_1y_1})$.

3.1 关于 E_1 点在 g 轴的坐标值为 I_{x_1} 的证明

$$\overline{OG_1} = \overline{OC} + \overline{CG_1} = \overline{OC} + \overline{CE_1} \times \cos(2\alpha + 2\alpha_0) = \overline{OC} + \overline{CD_1} \times \cos(2\alpha + 2\alpha_0),$$

其中 $\overline{OC} = \frac{I_x + I_y}{2}, \overline{CD_1} \cos 2\alpha_0 = \overline{CF_1} = I_x - \frac{I_x + I_y}{2} =$

$\frac{I_x - I_y}{2}, \overline{CD_1} \sin 2\alpha_0 = \overline{D_1F_1} = I_{xy}$, 所以 $\overline{OG_1} = \frac{I_x + I_y}{2} +$

$\frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$, 又因为 $I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}$

$\cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$, 所以 E_1 点在 g 轴的坐标值为 $\overline{OG_1} = I_{x_1}$.

3.2 关于 E_1 点在 f 轴的坐标值为 $I_{x_1y_1}$ 的证明

$$\overline{G_1E_1} = \overline{CE_1} \sin(2\alpha + 2\alpha_0) = \overline{CD_1} \sin(2\alpha + 2\alpha_0),$$
$$\overline{G_1E_1} = \overline{CD_1} (\cos 2\alpha_0 \sin 2\alpha + \sin 2\alpha_0 \cos 2\alpha),$$

其中 $\overline{CD_1} \cos 2\alpha_0 = \overline{CF_1} = \frac{I_x - I_y}{2}, \overline{CD_1} \sin 2\alpha_0 = \overline{D_1F_1} =$

收稿日期: 2004-06-04; 修订日期: 2004-10-15

作者简介: 李建楠 (1965-), 男, 河南潢川人, 学士, 高级工程师, 主要研究方向: 工程力学.

I_{xy} , 所以 $G_1 E_1 = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$, 因为 $I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$, 所以 E_1 点在 f 轴的坐标值为 $G_1 E_1 = I_{x_1 y_1}$.

3.3 关于 E_2 点在 g 轴的坐标值为 I_{y_1} 的证明
 因为 E_1, E_2 两点关于 C 点对称, 所以 $OC = \frac{OG_1 + OG_2}{2}$, 所以 $OG_2 = 2OC - OG_1 =$

$$2 \times \frac{I_x + I_y}{2} - I_{x_1} = (I_x + I_y) - I_{x_1},$$

由 (a) + (b) 可知: $I_x + I_y = I_{x_1} + I_{y_1}$, 即 $I_{y_1} = (I_x + I_y) - I_{x_1} = OG_2$, 所以 E_2 点在 g 轴的坐标值为 $OG_2 = I_{y_1}$.

3.4 关于 E_2 点在 f 轴的坐标值为 $-I_{x_1 y_1}$ 的证明
 因为 E_1, E_2 两点关于 C 点对称, 所以 $G_2 E_2 = G_1 E_1 = I_{x_1 y_1}$, E_2 点在 f 轴的坐标值为 $-G_2 E_2 = -I_{x_1 y_1}$.

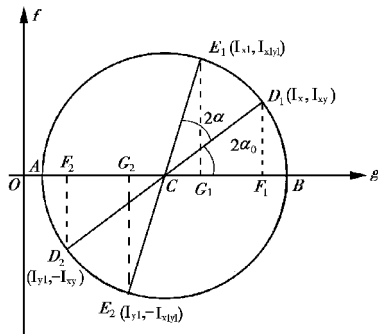


图 1 惯性矩圆

Fig 1 The circle of inertia

4 应用举例

如图 2, 型号为 100 mm × 100 mm × 10 mm 的等边角钢对 x, y 轴 (形心轴) 的惯性矩和惯性积分别为 $I_x = I_y = 179.51 \text{ cm}^4, I_{xy} = -105.16 \text{ cm}^4$. 求该等边角钢的形心主惯性矩 I_{x_0}, I_{y_0} 及形心主惯性轴 x_0 的位置.

解: 建立 gof 坐标系, 作以

$$D_1 (179.51, -105.16), D_2 (179.51, 105.16)$$

为端点的直径, 以 $D_1 D_2$ 与 g 轴交点 C 为圆心的圆. 将直径 $D_1 D_2$ 绕 C 点逆时针旋转 90° 与圆交于 E_1, E_2 两点, 于是

$$I_{x_0} = 179.51 + 105.16 = 284.67 (\text{cm}^4),$$

$$I_{y_0} = 179.51 - 105.16 = 74.35 (\text{cm}^4).$$

且 $2\alpha_0 = 90^\circ$ 即 $\alpha_0 = 45^\circ$.

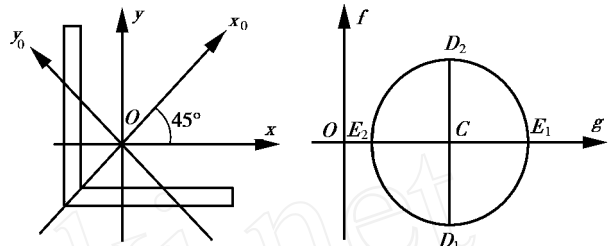


图 2 截面与惯性圆

Fig 2 Section and the circle of inertia

5 用惯性圆分析惯性矩和惯性积的讨论

5.1 惯性圆的水平直径 AB 的两端纵坐标都为零, 说明它对应一对互相垂直的主惯性轴 $x_0 O y_0$, 且

$$I_{x_0} = OB = \text{圆心坐标} + \text{圆半径} =$$

$$\frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2},$$

$$I_{y_0} = OA = \text{圆心坐标} - \text{圆半径} =$$

$$\frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2},$$

从 $D_2 D_1$ 顺时针旋转到 AB 的角度是 $2\alpha_0$, 且有

$$\text{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}.$$

5.2 惯性圆中任意一根直径两端横坐标之和都是圆心横坐标的两倍, 说明过 O 点的任意一对互相垂直的坐标轴的惯性矩之和不变.

5.3 惯性圆上最高点和最低点分别对应惯性积的最大值和最小值, 即惯性圆半径并冠以正负号, 所以

$$I_{xy \max} = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2},$$

$$I_{xy \min} = -\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}.$$

5.4 当 $I_x = I_y$ 且 $I_{xy} = 0$ 时, 即通过 O 点的所有坐标轴都为惯性轴, 圆心的坐标为 $\left(\frac{I_x + I_y}{2}, 0\right)$, 半径缩小为 0 的点圆.

(下转第 181 页)

结实与生长这两个性状时,要全面考虑,综合评价。

实现种子园的中心任务——不断提高种子遗传品质和产量的最关键措施就是无性系的再选择。对用材树种而言,无性系再选择的依据主要是

无性系本身的开花结实性和无性系所产生子代的生长表现^[12]。所以我们对种子园中无性系的开花结实习性也要像通过子代测定评估遗传品质一样,经多年观察后给予评定,才能作为种子园去劣疏伐或重建种子园的依据。

参考文献:

- [1] 张全仁,陈佛寿.杉木无性系选育[A].沈熙环.种子园技术[C].北京:北京科学技术出版社,1992:55-63.
- [2] 俞新妥.杉木栽培学[M].福州:福建科学技术出版社,1996.
- [3] 迟健.杉木种子园无性系间结实和种子品质差异研究[J].福建林学院学报,1987,(2):49-55.
- [4] 张敬源.提高种子产量的八项措施[A].沈熙环.种子园技术[C].北京:北京科学技术出版社,1994:65-69.
- [5] 施季森.杉木[A].沈熙环.种子园技术[C].北京:北京科学技术出版社,1992:1-3.
- [6] 国家标准局.主要针叶树种种子园营建技术[M].北京:中国林业出版社,1988:3-5.
- [7] 马育华.试验设计[M].北京:农业出版社,1982.
- [8] 戴君惕,苏初程,陈华明.相关遗传力及其在育种上的应用[J].遗传学报,1983:10(5):375-383.
- [9] 潘惠新,黄敏仁,阮锡根.材性改良研究 VI 美洲黑杨小叶杨新无性系木材性状遗传相关分析[J].林业科学,1997,33(1):83-92.
- [10] 卢天玲,黄寿先,梁机.杉木 1.5代种子园营建技术研究成果论文[D].1997.
- [11] 梁机,周传明.1.5代杉木种子园开花规律的观察分析[J].广西农业大学学报,1998,17(3):22-26.
- [12] 王明麻.林木遗传育种学[M].北京:中国林业出版社,2001.

A genetic correlation and path-coefficient analysis of quantity of flowers and growth traits of Chinese fir clones in Guangxi

MO Zhao-zhan^{1,2}, SHI Xin-cheng³, LIANG Hai-qing²

(1. Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China; 2. Yulin Normal College, Yulin 537000, China; 3. Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China)

Abstract: The gross flowers and height, diameter, crown width, crown height, crown surface of Chinese fir clones in Guangxi area were investigated by genetic correlation analysis and path-coefficient analysis. The results show that the genetic correlation coefficients between gross flowers and growth traits were negative, it was inefficient when we selected gross flowers by growth traits, the correlation variation of gross flowers was little, the trait was stable, correlative heritability path-coefficient analysis show that the difference between the direct effect of gross flower and the correlative heritability is very large.

Key words: Chinese fir clones; correlative heritability; correlation analysis; path-coefficient analysis

责任编辑:任长江

(上接第 144 页)

参考文献:

- [1] 孙训方,方孝淑,关来泰.材料力学[M].北京:高等教育出版社,2001.
- [2] 刘鸿文.材料力学(上)[M].北京:高等教育出版社,1992.
- [3] 单辉祖.材料力学(上)[M].北京:国防工业出版社,1995.

The diagrammatical analysis of moment of inertia & product of inertia's rotation axis formula

LI Jian-nan, CHEN Zhe, DONG Xiang-wei

(Department of Architecture & Engineering, Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China)

Abstract: The method of the diagrammatical analysis of moment of inertia & product of inertia's rotation axis formula is introduced. The position of principal axis of inertia & principal moment of inertia is determined.

Key words: moment of inertia; product of inertia; principal axis of inertia; principal moment of inertia

责任编辑:郭红建