

光子的输运方程、扩散近似 与Rosseland平均自由程

冯 男 乐清平

摘 要 本文采用具体条件下的散射模型,对光子输运方程中的散射项作了近似处理。进一步在对系统作了部分与完全热动平衡的模型下,又将光子输运方程化简为扩散方程求解。同时在讨论辐射总能量流热传导方程时,引入了Rosseland平均自由程 l 。

关键词 光子分布函数 微分截面 输运方程 辐射热传导系数 Rosseland平均自由程

在相当多的实际问题中,必须研究光子的输运。解输运方程用解析的办法不可能,多用计算机求数值解,即是如此,工作量也十分可观。一般在保证解的精确度及减少工作量的前提下,多作扩散近似,将输运方程化为扩散方程。作了扩散近似后又涉及到光的平均自由程,而自由程常用Rosseland平均。

(一) 有关辐射的几个宏观物理量

首先引入光子分布函数 $f_{\nu}(\vec{\Omega}, \vec{r}, t)$,该量与光子频率 ν ,传播方向 $\vec{\Omega}$,空间位置 $\vec{r}$ 及所处时刻有关。其定义:

$f_{\nu}(\vec{\Omega}, \vec{r}, t) d\nu d\vec{\Omega} d\vec{r}$ 为时刻 t 、在 $d\nu$ 频率区间、 $d\vec{\Omega}$ 立体角、 $d\vec{r}$ 体元内的光子数。

其次引入光子密度 f_{ν}^0 ,其意义是单位体积内的光子数,显见,

$$f_{\nu}^0 = \int_{\vec{\Omega}} f_{\nu}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (1)$$

若 f_{ν} 是各向同性的,则 $f_{\nu}^0 = 4\pi \tilde{f}_{\nu}$, $\tilde{f}_{\nu}$ 为各向同性时 f_{ν} 之值。

再引入能量密度 ε_{ν} ,将 f_{ν}^0 乘以 $h\nu$ 即为能量密度, $\varepsilon_{\nu} = f_{\nu}^0 h\nu$,而 $\varepsilon_{\nu} d\nu d\vec{r}$ 则表示在 t 时刻、 $d\nu$ 频率区间、 $d\vec{r}$ 体元内的能量。与频率无关的总能量密度由下式给出,

$$\varrho = \int \varrho_{\nu} d\nu \quad (2)$$

如果辐射处于热力学平衡态, 光子满足planck分布

$$\varrho_{\nu} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (3)$$

因此, 辐射总能量密度,

$$\varrho = \int_0^{\infty} \varrho_{\nu} d\nu = \frac{8\pi}{c^3 h^3} (kT)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = a T^4 \quad (4)$$

$$\text{其中 } a = \frac{8}{15} \frac{\pi^5 k^4}{h^3 c^3} = 7.568 \times 10^{-15} \text{ erg/c} \cdot \text{c}^{\text{deg}^4}$$

第四步引入光子流 j_{ν} , 其意义是 $\vec{r}$ 处沿 $\vec{\Omega}$ 方向单位时间通过单位面积 (平面法线 $\vec{n} \parallel \vec{\Omega}$) 频率为 ν 的光子数, 显然,

$$j_{\nu} = c f_{\nu} \quad (5)$$

下边几个宏观量的引入也是必须的。辐射强度 I_{ν} , 其意义由下式表述,

$$I_{\nu} = h\nu j_{\nu} = h\nu c f_{\nu} \quad (6)$$

能量流 F_{ν} , 可定义为,

$$F_{\nu} = \int_{\Omega} I_{\nu} \cos\theta d\Omega \quad (7)$$

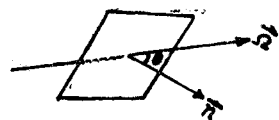
这里需要指明, 它代表 $\vec{r}$ 处单位时间通过单位面积的能量。

θ 为 $\vec{\Omega}$ 与面法线 $\vec{n}$ 的夹角。将 (7) 写为矢量的形式,

$$\vec{F}_{\nu} = \vec{n} \cdot \int_{\Omega} I_{\nu} d\vec{\Omega} \quad (8)$$

总能量流 $\vec{F}$, 显见应为,

$$\vec{F} = \int_{\nu} \vec{F}_{\nu} d\nu \quad (9)$$



(二) 表示物质吸收、辐射、散射能力大小的几个物理量

1、吸收几率 $\omega_{\text{吸}}$

一个处于 a 状态的原子 (能量为 E_a) 在光子流 j_{ν} 的作用下, 单位时间内跃迁到 b 态 ($E_b > E_a$, 且 $E_a + h\nu = E_b$) 的几率称之为吸收几率。因跃迁一次吸收一个光子, 故 $\omega_{\text{吸}}$ 表示单位时间内一个原子吸收频率为 ν 的光子数。即 $\omega_{\text{吸}} \sim j_{\nu}$ 。

2、吸收截面 $\sigma_{\text{吸}}$

因 $\omega_{\text{吸}} \sim j_{\nu}$, 如 j_{ν} 可规定它为一常数, 单单从 $\omega_{\text{吸}}$ 尚难区别各种物质吸收能力的大小 (因与外场强度有关), 但若一律规定 j_{ν} 为单位流, 那么可得表征各物质吸收能力强弱的特征量—截面

$$\sigma_{\text{吸}} = \frac{\omega_{\text{吸}}}{j_{\nu}} \quad (10)$$

$\sigma_{\text{吸}}$ 的物理意义是在单位 j_{ν} 的作用下, 单位时间内一个原子吸收频率为 ν 的光子数。

3、吸收系数 $\mu_{\text{吸}}$

设 N^a 为单位体积中处于 a 态的粒子数, 定义,

$$\mu_{\text{吸}} = \sigma_{\text{吸}} \cdot N^a \quad (11)$$

$\mu_{\text{吸}}$ 的物理意义为在单位 j_{ν} 作用下, 单位体积中, 单位时间内吸掉的光子数。显然下式成立,

$$\sigma_{\text{吸}} N^a \cdot j_{\nu} d\nu d\vec{\Omega} = \omega_{\text{吸}} \cdot N^a d\nu d\vec{\Omega} \quad (12)$$

其物理意义是在 $j_{\nu}(\vec{\Omega}) d\nu d\vec{\Omega}$ 的作用下, 在单位时间单位体积中吸收掉在 $d\nu$ 频率区间 $d\vec{\Omega}$ 立体角中的光子数。

4、辐射几率 $\omega_{\text{辐}}$

一个处于 b 态的原子 (其能量为 E_b) 在 j_{ν} 的作用下, 单位时间跃迁到 a 态 (其能量为 E_a , 且 $E_b = E_a + h\nu$) 的几率称之为辐射几率。

因每跃迁一次辐射一个光子, 故 $\omega_{\text{辐}}$ 也就是单位时间一个原子辐射的光子数。

仿前, 可引入辐射截面 $\sigma_{\text{辐}}$ 、辐射系数 $\mu_{\text{辐}}$ 。如此, 不难看出,

$$\omega_{\text{辐}} \cdot N^b d\nu d\vec{\Omega} \quad (13)$$

为在 j_{ν} 的作用下, 单位时间、单位体积中辐射出的 $d\nu$ 频率区间 $d\vec{\Omega}$ 立体角中的光子数, 这里 N^b 为单位体积中处于 b 态的粒子数。

辐射几率 $\omega_{\text{辐}}$ 与吸收几率 $\omega_{\text{吸}}$ 之间有如下的关系

$$\frac{\omega_{\text{辐}}}{\omega_{\text{吸}}} = 1 + \frac{2\nu^2}{C^3} \frac{1}{f_{\nu}} \quad (14)$$

5、散射几率

先定义微分散射几率 $d\omega_{\text{散}}(\nu\nu', \vec{\Omega}, \vec{\Omega}', \vec{p})$: 一个处于 b 态的粒子 (例如具有动量为 $\vec{p}$ 的自由电子) 在 $j_{\nu}(\vec{\Omega})$ 的作用下, 单位时间内将原来具有 ν 频率沿 $\vec{\Omega}$ 传播的光子散射到 $\vec{\Omega}'$ 方向并具有 ν' 频率的几率。微分散射截面由下式定义,

$$d\sigma_{\text{散}}(\nu\nu', \vec{\Omega}, \vec{\Omega}', \vec{p}) = d\omega_{\text{散}} / j_{\nu} \quad (15)$$

因 $d\omega_{\text{散}}$ 及 $d\sigma_{\text{散}}$ 中已含有 $d\vec{\Omega}'$, 故,

$$\text{总散射几率} = \int_{\vec{\Omega}} d\omega_{\text{散}} \quad (16)$$

$$\text{总散射截面} = \int_{\vec{\Omega}'} d\sigma_{\text{散}} \quad (17)$$

以后会看到,当 $\vec{\Omega}'$ 方向在散射前已有能量为 $h\nu'$ 的光子,则散射几率(或散射截面)尚需乘以因子 $\left(1 + \frac{c^3}{2h\nu'^2} f_{\nu'}(\vec{\Omega}')\right)$ 。

令 $N(\vec{P})$ 为单位体积中具有动量 $\vec{P}$ 的粒子数,那么,

$$\int_{\vec{P}} N(\vec{P}) d\vec{P} \int_{\vec{\Omega}'} \left\{ \frac{d\sigma(\nu\nu'\vec{\Omega}\vec{\Omega}',\vec{P})}{d\Omega'} c f_{\nu}(\vec{\Omega}) d\nu \right. \\ \left. \left(1 + \frac{c^3}{2h\nu'^2} f_{\nu'}(\vec{\Omega}') \right) \right\} d\vec{\Omega}' \quad (18)$$

为在 $j_{\nu'}(\vec{\Omega}) d\nu$ 作用下单位时间、单位体积中散射掉 $d\nu$ 频率区间沿 $\vec{\Omega}$ 方向传播的光子数。而,

$$\int_{\vec{P}} N(\vec{P}') d\vec{P}' \int_{\vec{\Omega}'} \left\{ \frac{d\sigma(\nu'\nu\vec{\Omega}'\vec{\Omega},\vec{P}')}{d\Omega} c f_{\nu'}(\vec{\Omega}') d\nu' \right. \\ \left. \left(1 + \frac{c^3}{2h\nu^2} f_{\nu}(\vec{\Omega}) \right) \right\} d\vec{\Omega}' \quad (19)$$

为在 $j_{\nu'}(\vec{\Omega}) d\nu$ 作用下单位时间单位体积中,其它光子向 $\vec{\Omega}$ 方向散射入的光子数。其中 $N(\vec{P}')$ 为单位体积中具有动量 $\vec{P}$ 的粒子数。

(三) 光子输运方程

当光子束通过某介质时,由于光与物质的相互作用,引起一系列物理过程(例如,吸收、辐射、散射等)这就会使光子束中的光子数有所增减, f_{ν} 有所变化。所谓光子输运方程就是 f_{ν} 通过介质时服从的规律。

我们知道沿 $\vec{\Omega}$ 方向传播的能量为 $h\nu$ 的光子,在单位时间、单位体积中的变化应为,

$$\frac{df_{\nu}}{dt} = \frac{\partial f_{\nu}}{\partial t} + c\vec{\Omega} \cdot \nabla f_{\nu} \quad (20)$$

综合(12)(13)(18)及(19),可得光子的输运方程

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{\nu} + c\vec{\Omega} \cdot \nabla f_{\nu} = \omega_{\text{辐}} \cdot N^b - \omega_{\text{吸}} N^a \\ - \int_{\vec{P}} N(\vec{P}) d\vec{P} \int_{\vec{\Omega}} \left\{ \frac{d\sigma(\nu\nu'\vec{\Omega}\vec{\Omega}',\vec{P})}{d\Omega'} c f_{\nu'}(\vec{\Omega}') d\nu' \right. \\ \left. \left(1 + \frac{c^3}{2h\nu'^2} f_{\nu'}(\vec{\Omega}') \right) \right\} d\vec{\Omega}'$$

$$+ \int_{\vec{P}'} N(\vec{P}') d\vec{P}' \int_{\vec{\Omega}'} \frac{d\sigma(v' v \vec{\Omega}' \vec{\Omega} \vec{P}')}{d\Omega} c f_v(\vec{\Omega}') dv' \\ \left(1 + \frac{c^3}{2 h v^2} f_v(\vec{\Omega}) \right) \} d\vec{\Omega}' \quad (21)$$

右端第一项，第四项为正号，因它们使 $\vec{\Omega}$ 方向的光子数有所增加，而第二项，第三项为负号，因它们使 $\vec{\Omega}$ 方向的光子数有所减少。在普遍情况下，求解光子的输运方程是十分复杂的，人们往往针对不同的具体情况作各种不同的近似，使(21)大大简化。在感兴趣的高温高压条件下，作哪些假设与近似能使(21)得到简化？下边研究这个问题。

(四) 散射项的近似处理

在上面的讨论中，对散射的处理是考虑了电子对光子的散射，且微分截面与 $\vec{P}$ 有关。因而电子数 $N(\vec{P})$ 亦是 $\vec{P}$ 的函数，这就使问题复杂化了。事实上，吸收或辐射截面远远大于散射截面，因此，对散射项可近似处理。作近似：

1、假定自由电子在散射前为静止，如此电子数将与 $\vec{P}$ 无关，显见，

$$\int N(\vec{P}) d\vec{P} = N^e \quad (22)$$

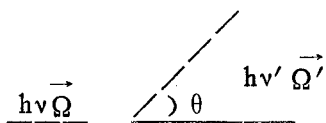
N^e —单位体积中的自由电子数。

2、当系统的温度不十分高，即满足 $h\nu \ll mc^2$ 时，那么，散射可以认为是非变频的。可用Klein—Nishiwara公式

$$d\sigma(v v' \vec{\Omega} \vec{\Omega}') = \frac{1}{2} r_o^2 \left(\frac{v'}{v} \right) \left(\frac{v}{v'} + \frac{v'}{v} - \sin^2 \theta \right) d\Omega' \quad (23)$$

这里，

$$v' = \frac{mc^2 v}{mc^2 + h\nu(1 - \cos \theta)} \quad (24)$$



$$r_o = \frac{e^2}{m e^2} \text{——古典电子半径。}$$

看出，当 $h\nu \ll mc^2$ 时，有 $v' = v$ ，因此(23)可简化为，

$$d\sigma(v \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = \frac{1}{2} r_o^2 (2 - \sin^2 \theta') d\Omega' \quad (25)$$

如果，我们感兴趣的温度范围在1 keV—10 keV之间那么 $h\nu \ll mc^2 = 510 \text{ keV}$ 是成立的。

作了这两个近似之后。(21)可写为，

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_v}{\partial t} + c \vec{\Omega} \cdot \nabla f_v &= \omega_{\text{辐}} \cdot N^b - \omega_{\text{吸}} \cdot N^a \\ &- N \int_{\vec{\Omega}'} \left\{ \frac{1}{2} r_o^2 (2 - \sin^2 \theta') c f_v(\vec{\Omega}) \left(1 + \frac{c^3}{2 h v'^2} f_{v'}(\vec{\Omega}') \right) \right\} d\vec{\Omega}' \\ &+ N \int_{\vec{\Omega}'} \left\{ \frac{1}{2} r_o^2 (2 - \sin^2 \theta') c f_{v'}(\vec{\Omega}') \left(1 + \frac{c^3}{2 h v^2} f_v(\vec{\Omega}) \right) \right\} d\vec{\Omega}' \quad (26) \end{aligned}$$

因 $v' \sim v$, 故 $\frac{c^3}{2 h v'^2} f_v(\vec{\Omega}) = \frac{c^2}{2 h v^2} f_{v'}(\vec{\Omega}) f_v(\vec{\Omega})$, 于是积分中有两项相消, 得出,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_v}{\partial t} + c \vec{\Omega} \cdot \nabla f_v &= \omega_{\text{辐}} N^b - \omega_{\text{吸}} N^a \\ &- N c \int_{\vec{\Omega}'} r_o^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta' \right) f_v(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega}' \\ &+ N c \int_{\vec{\Omega}'} r_o^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta' \right) f_{v'}(\vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \quad (27) \end{aligned}$$

第一个积分中 $f_v(\vec{\Omega})$ 与 $\vec{\Omega}'$ 无关, 可提出, 而

$$\begin{aligned} r_o^2 \int_{\vec{\Omega}'} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta' \right) d\vec{\Omega}' &= r_o^2 \int \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta' \right) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{8}{3} \pi r_o^2 \end{aligned}$$

这正是非相对论 Thomson 散射总截面, 以 σ_s 表示。于是光子的输运方程又可简化为,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_v}{\partial t} + (\vec{\Omega} \cdot \nabla f_v &= \omega_{\text{辐}} \cdot N^b - \omega_{\text{吸}} \cdot N^a - C N \sigma_s f_v \\ &+ N r_o^2 C \int_{\vec{\Omega}'} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta' \right) f_{v'}(\vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \quad (28) \end{aligned}$$

(五) 部分与完全的局部热动平衡

上段讨论了散射项的近似处理, 现在来研究辐射和吸收项。将 (28) 改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_v}{\partial t} + c \vec{\Omega} \cdot \nabla f_v &= \omega_{\text{吸}} N^a \left(-1 + \frac{N^b}{N^a} \frac{\omega_{\text{辐}}}{\omega_{\text{吸}}} \right) \\ &- c N \sigma_s f_v + N r_o^2 c \int_{\vec{\Omega}'} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta' \right) f_{v'}(\vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \quad (29) \end{aligned}$$

在我们研究的系统中, 物质与物质之间辐射与物质之间热交换两者达不到统一的平衡状态, 即不可能以统一的温度来描述, 但把整个系统分成许多子系统, 则在每个子系统中(局部)可能达到热平衡状态, 并具有温度 T_i , 若只是物质与物质达到热平衡状态(进行了充分的能量交换), 称这种情况为部分局部热动平衡。辐射与物质之间也达到平衡状态, 则将这种情况叫做完全局部热动平衡状态。

在完全局部热动平衡条件成立的情况下, 方程(29)具有极简单的形式。由统计物理知, 如物质粒子服从Boltzmann分布, 在热动平衡下有下列关系式

$$\frac{N^b}{N^a} = e^{-h\nu/kT} \quad h\nu = E_b - E_a \quad (30)$$

如此, 有,

$$\omega_{\text{吸}} N^a \left(-1 + \frac{N^b}{N^a} \frac{\omega_{\text{辐}}}{\omega_{\text{吸}}} \right) = \sigma_{\text{吸}} N^a c f_{\nu} \left[-1 + e^{-h\nu/kT} + e^{-h\nu/kT} \frac{2\nu^2}{c^3} \frac{1}{f_{\nu}} \right] = c \mu_{\text{吸}} \left[1 - e^{-h\nu/kT} \right] [\bar{f}_{\nu} - f_{\nu}] \quad (31)$$

其中,

$$\bar{f}_{\nu} = \frac{2\nu^2}{c^3} e^{-h\nu/kT}$$

于是, (29)简化为

$$\frac{\partial f_{\nu}}{\partial t} + c \vec{\Omega} \cdot \nabla f_{\nu} = \mu_{\text{吸}} (1 - e^{-h\nu/kT}) [\bar{f}_{\nu} - f_{\nu}] - \mu_{\text{散}} f_{\nu} + N \mathbf{r}^2 \cdot \int_{\vec{\Omega}'} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta' \right) f_{\nu}'(\vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \quad (32)$$

(31)式不是别的, 正是在完全局部热动平衡成立的条件下Planck分布函数。这由(3)与(31)相比即可看到

$$\int_{\vec{\Omega}} h\nu \bar{f}_{\nu} d\vec{\Omega} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \nu$$

这一关系也可由(32)得出, 因当完全局部热动平衡条件成立时, f_{ν} 不依赖于时间与空间而是一个各向同性常数。因此方程(32)的左边等于零, 同时积分项中可提出 f_{ν} , 因而最后一项 $\mu_{\text{散}} f_{\nu}$ 与第三项相消。由此看出, 在完全局部热动平衡下散射出等于散射入。于是,

$$0 = \mu_{\text{吸}} (1 - e^{-h\nu/kT}) (\bar{f}_{\nu} - f_{\nu})$$

$f_{\nu} = \bar{f}_{\nu}$, 即 f_{ν} 具有planck分布函数形式。

(六) 扩散近似

方程(32)是一个微分积分方程, 可把 f_{ν} 进行级数展开来求解, 零级项给出各项同性解, 即 $f_{\nu} = \bar{f}_{\nu}$ 一级项则给出扩散近似的结果, 其它项则给出更高级的修正项。这里我们只讨论扩散近似, 扩散近似的物理意义在于分布函数 f_{ν} 几乎是各向同性的。

$$\text{令} \quad f_{\nu} = \bar{f}_{\nu} + \delta \quad f_{\nu}' = \bar{f}_{\nu}' + \delta \quad (33)$$

这里 $\delta \ll \bar{f}_{\nu}$ 是微小的修正量。

将(33)代入(32)式的积分中, 且忽略掉高级修正量, 则得 $\mu_{\text{散}} \bar{f}_{\nu}$, 同样将(33)代入(32)的左边, 且忽略掉 δ 项, 得 $\vec{\Omega} \cdot \nabla f_{\nu}$, 于是(32)可写为

$$\bar{\Omega} \cdot \nabla f_v = \mu_{\text{吸}} (1 - e^{-h\nu/kT}) [\bar{f}_v - f_v] + \mu_{\text{散}} [\bar{f}_v - f_v] \quad (34)$$

令 $\mu_{\text{吸}}^* = \mu_{\text{吸}} (1 - e^{-h\nu/kT})$, 而 $\mu_{\text{吸}}^* + \mu_{\text{散}} = \mu_v$
则,

$$\bar{\Omega} \cdot \nabla f_v = \mu_v (\bar{f}_v - f_v)$$

或,

$$f_v = \bar{f}_v - \frac{1}{\mu_v} \bar{\Omega} \cdot \nabla f_v \quad (35)$$

(35) 就是用扩散近似法求解 (32) 方程所给的结果。

这里 μ_v 是 (吸收 + 散射) 系数, 通常引入另一个量 l_v , 所谓平均自由程。即

$$l_v = \frac{1}{\mu_v} = \frac{1}{\mu_{\text{吸}} (1 - e^{-h\nu/kT}) + \mu_{\text{散}}} \quad (36)$$

$[l_v] = \text{长度}$

(35) 也就可写成

$$f_v = \bar{f}_v - l_v \bar{\Omega} \cdot \text{grad } f_v \quad (37)$$

而, $l_v = \frac{2v^2}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$

(七) 辐射热传导律及辐射热传导系数 K 、Rosseland 平均自由程、平均 (吸收 + 散射) 系数、不透明度

上面已求出 f_v , 但在实际问题中经常是要考虑能量的变化过程, 因此, 研究能量流。为简单计, 分析平面情况, (35) 可写为,

$$f_v = \bar{f}_v - l_v \cos \phi \frac{\partial}{\partial R} \bar{f}_v \quad (38)$$

ϕ 为 $\vec{\Omega}$ 与 $\vec{R}$ 之间的夹角。利用 (一) 中所讨论的各量之间的关系, 得出,

$$\begin{aligned} F_v &= \int_{\vec{\Omega}} I_v \cos \phi d\vec{\Omega} = \int_{\vec{\Omega}} h\nu c f_v \cos \phi d\vec{\Omega} \\ &= h\nu c \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi f_v \cos \phi \sin \phi d\theta = -2\pi h\nu c \int_0^\pi f_v \cos \phi d\cos \phi \\ &= 2\pi h\nu c \int_{-1}^1 f_v y dy \end{aligned} \quad (39)$$

其中, $y = \cos \phi$, 将 (38) 代入 (39), 得,

$$F_v = 2\pi h\nu c \int_{-1}^1 [\bar{f}_v - l_v y \frac{\partial}{\partial R} \bar{f}_v] y dy$$

$$= 2\pi h\nu c \int_{-1}^1 f_v y dy - 2\pi h\nu c \int_{-1}^1 l_v y \frac{\partial}{\partial R} \bar{f}_v dy$$

由(31)知, $\bar{f}_v$ 与 y 无关, 有 $\int \bar{f}_v y dy = 0$,

$$\text{于是, } F_v = -2\pi h\nu c l_v \frac{\partial}{\partial R} \bar{f}_v \int_{-1}^1 y^2 dy = -\frac{4\pi}{3} l_v h\nu c \frac{\partial}{\partial R} \bar{f}_v$$

但, $4\pi h\nu c \bar{f}_v = \vartheta_v$, 从而,

$$F_v = -\frac{1}{3} c l_v \frac{\partial \vartheta_v}{\partial R} \quad (40)$$

总能量流,

$$F = \int_0^\infty F_v dv = -\frac{c}{3} \int_0^\infty l_v \frac{\partial \vartheta_v}{\partial R} dv \quad \text{利用 } \frac{\partial \vartheta_v}{\partial R} = \frac{\partial \vartheta_v}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial R}, \text{ 有}$$

$$\begin{aligned} F &= -\frac{c}{3} \frac{\partial T}{\partial R} \int_0^\infty l_v \frac{d \vartheta_v}{dT} dv \\ &= -\frac{c}{3} \frac{\partial T}{\partial R} \int_0^\infty \frac{d \vartheta_v}{dT} \cdot \frac{\int_0^\infty l_v \frac{d \vartheta_v}{dT} dv}{\int_0^\infty \frac{d \vartheta_v}{dT} dv} dv, \end{aligned}$$

$$\text{但, } \int \frac{d \vartheta_v}{dT} dv = \frac{d}{dT} \int_0^\infty \vartheta_v dv = 4 a T^3 \quad (40')$$

$$\text{令, } \bar{l} = \frac{\int_0^\infty l_v \frac{d \vartheta_v}{dT} dv}{\int_0^\infty \frac{d \vartheta_v}{dT} dv}, \text{ 最后得,}$$

$$F = -\frac{4 a T^3 c}{3} \bar{l} \frac{\partial T}{\partial R} \quad (41)$$

$$\text{再令, } K = \frac{4 a T^3}{3} c \bar{l}, \text{ 有,}$$

$$F = -K \frac{\partial T}{\partial R} \quad (42)$$

(41) 称为辐射热传导定律, K 称为热传导系数, $\bar{l}$ 即所谓 Rosseland 平均自由程。由

(41) 可引入平均(吸收+散射)系数, $(\bar{\mu})^{-1} = \int_0^\infty \frac{1}{\mu_v} \frac{d \vartheta_v}{dT} dv / \int_0^\infty \frac{d \vartheta_v}{dT} dv$ 即

$l = -\frac{1}{\mu}$ 。通常在一些文献中尚引入不透明度的概念,其定义为, $\chi_v = l_v/\rho$, 这里的 ρ

是物质的密度, $\bar{\chi} = \bar{l}/\rho$ 。

(八) 平均自由程

导出辐射热传导律后,问题的焦点在于如何求出 $\bar{l}$ 之值。由 $\bar{l}$ 的定义看出,它是 l_v 带权重函数 $\frac{d \mathcal{E}_v}{dT}$ 对 v 进行的平均值。正是引进了该平均值,才导致了 (42) 式,因而使 F 的表达式得到很大的简化。为便于计算,再对 $\bar{l}$ 进行一些简化,

考察 $\bar{l}$ 表达式中的 $\frac{d \mathcal{E}_v}{dT} = \frac{d}{dT} \left(\frac{8\pi h v^3}{c^3} \frac{1}{e^{hv/kT} - 1} \right)$

$$= \frac{8\pi h v^3}{c^3} \cdot \frac{\frac{hv}{kT^2} e^{hv/kT}}{(e^{hv/kT} - 1)^2}, \text{ 令 } \mu = hv/kT, \text{ 则}$$

$$\int_0^\infty \frac{d \mathcal{E}_v}{dT} dv = \frac{8\pi k^4 T^3}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{u^4 e^u}{(e^u - 1)^2} du \quad (42)$$

另一方面,由 (40'),

$$\int_0^\infty \frac{d \mathcal{E}_v}{dT} dv = 4 a T^3, \quad a = \frac{8 \pi^5 k^4}{15 h^3 c^3}$$

比较上述两式,得,

$$\frac{8 \pi k^4 T^3}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{u^4 e^u}{(e^u - 1)^2} du = 4 \cdot \frac{8 \pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} T^3$$

看出 $\int \frac{u^4 e^u}{(e^u - 1)^2} du = \frac{4 \pi^4}{15} \quad (43)$

将 (43) 及 (42) 代入 (41) 得

$$\bar{l} = \frac{15}{4 \pi^4} \int_0^\infty l_u \frac{u^4 e^u}{(e^u - 1)^2} du \quad (44)$$

因 l_v 是 v 的函数,常进行 $u = \frac{hv}{kT}$ 变换时,同时也把 l_v 变换为 l_u 了。

回顾 l_u 的定义,

$$l_u = \frac{1}{\mu_{\text{吸}}^*(u) + \mu_{\text{散}}(u)} = \frac{1}{\mu_{\text{吸}}(u)(1 - e^{-u}) + \mu_{\text{散}}(u)}$$

于是,

$$\bar{l} = \frac{15}{4 \pi^4} \int_0^\infty \frac{u^4 e^u (e^u - 1)^{-2}}{\mu_{\text{吸}}(u)(1 - e^{-u}) + \mu_{\text{散}}(u)} du \quad (45)$$

亦可将 $\bar{1}$ 用截面表示出来, 回忆 $\mu_{\text{吸}}(u) = \sigma_{\text{吸}}(u) \cdot N^a$, $\mu_{\text{散}}(u) = \sigma_s(u) N^e$, $\sigma_{\text{吸}}(u)$ 为各种吸收截面之和, N^a 为能引起某种吸收的单位体积中的粒子数, $\sigma_s(u)$ 为 Thomson 散射截面, N^e 为单位体积中的自由电子数。

$$\bar{1} = \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{u^4 e^{-u} (e^u - 1)^{-2}}{\sigma_{\text{吸}}(u) N^a (1 - e^{-u}) + \sigma_s(u) N^e} du \quad (46)$$

进一步改变 (45) 的形式, 有

$$\begin{aligned} \bar{1} &= \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{u^7 e^{2u} (e^u - 1)^{-3}}{u^3 [\mu_{\text{吸}}(u) + \mu_{\text{散}}(1 - e^{-u})^{-1}]} du \\ &= \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{1}{[\mu_{\text{吸}}(u) + \mu_{\text{散}}(1 - e^{-u})^{-1}]} \frac{u^4 e^{-u}}{(1 - e^{-u})^3} du \end{aligned}$$

亦可写为,

$$\bar{1} = \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{1}{[\sigma_{\text{吸}}(u) N^a + \sigma_s(u) N^e \cdot (1 - e^{-u})^{-1}]} \frac{u^4 \cdot e^{-u}}{(1 - e^{-u})^3} \cdot du \quad (47)$$

如果, 不考虑线吸收, 只计及连续部分, 作 $\bar{1}$ 并不十分困难, 如考虑线吸收, 作 $\bar{1}$ 就很费力气了。

参考文献

- 1 B. A. 阿姆巴楚米扬主编, 《理论天体物理学》, 科学出版社, 1956
- 2 E. M. LIFSHITZ and L. P. PITAEVSKII PHYSICAL KINETICS
- 3 Harris Mayer METHODS OF OPACITY CALCULATIONS
AECD-1870

The Transport Equation for photons Diffusion Approximation and Rosseland Mean Free Path

Feng Nan Le Qingping

Abstract

This article makes an approximate treatment of the diffusion term in the transport equation for photons by means of diffusion model under concrete conditions. The transport equation for photons is simplified into diffusion one with the model of which the system is partially or totally thermo-balanced. Then it leads into Rosseland mean free path while analysing the diffusion equation.

Key Words: the distribution function for photons, differential cross-section, transport equation radiation, thermo-conductivity, Rosseland mean free path