信阳师范学院学报: 自然科学版
第 23卷　第 4期　2010年 10月

Journal of Xinyang Normal University
Natural Science Edition Vol. 23 No. 4 Oct. 2010

DOI: 10.3969/j.issn.1003-0972.2010.04.039

复数的三元数研究

王俊龙*

(《高等学校文科学术文摘》杂志社, 上海 200234)

摘　要: 复数 $a+bi$ 可扩展为三元数: $S=a+bi+c\phi$, 其中 $i^2=-1$, $\phi^2=-i$, $i\phi=i+\phi$, 且遵从加法和乘法规则.

关键词: 复数; 三元数; 运算规则

中图分类号: O153　　文献标志码: A　　文章编号: 1003-0972(2010)04-0630-02

Study on Ternary Number of Complex

WANG Jun-long*

(Periodical Office of China University Academic Abstracts, Shanghai 200234, China)

Abstract: Complex $a+bi$ can be expanded ternary number $S=a+bi+c\phi$, here: $i^2=-1$, $\phi^2=-i$, $i\phi=i+\phi$, and obey arithmetic rules of addition and multiplication.

Key words: complex; ternary number; arithmetic rule

Gauss成功将复数解释为高斯平面, 使复数得以用几何方法表示, 并且满足“模法则”. 因此, Hamilton提出一个问题: 既然有复数平面存在, 那是否也会有一种数可用三维空间来表示? 三元数作为复数的扩展, 被定义为一个具有加减法、乘法运算的数. 但是, 经过了多次的尝试、论证, 最后却只发现了四元数, 而未发现三元数的存在.

是否存在一种三元数, 以复数为子数系? 答案是肯定的. 以往未发现三元数, 是因为对其性质尚不完全了解. 三元数有不同于复数和四元数的特点, 比如, 不满足“模法则”.

三元数存在定理　若 $S=a+bi+c\phi$ 为三元数, 则 $i^2=-1$, $\phi^2=-i$, $i\phi=i+\phi$.

证明　若 $S=a+bi+c\phi$ 构成三元数, 则其遵循加法和乘法运算规则.

设 $S=a+bi+c\phi$ 和 $S'=a'+b'i+c'\phi$ 是任意两个三元数, 那么, 适用加法和乘法规则.

加法:

$$S+S'=a+b+(a'+b')i+(c+c')\phi$$

常元 1: $a+b$, 虚元 i: $a'+b'$, 玄元 ϕ: $c+c'$.

三元数加法是对应元系数相加, 遵循交换律.

乘法:

$$S\cdot S'=aa'-bb'+(ab'+a'b+bc'+b'c-cc')i+(ac'+a'c+bc'+b'c)\phi$$

常元 1: $aa'-bb'$, 虚元 i: $ab'+a'b+bc'+b'c-cc'$, 玄元 ϕ: $ac'+a'c+bc'+b'c$.

三元数乘法遵循交换律和乘法对加法分配律.

证毕.

三元数平方公式:

$$(a+bi+c\phi)^2=a^2-b^2+(2ab+2bc-c^2)i+(2ac+2bc)\phi$$

三元数立方公式:

$$(a+bi+c\phi)^3=a^3+3ab^2-2b^2c+bc^2+(3a^2b-2ac^2+2b^2c+6abc-b^3-c^3)i+(3a^2c+2bc^2+b^2c+6abc-c^3)\phi$$

由于三元数乘法的复杂性使得三元数的 N 次方通项公式的列示极其困难.

以下是一些三元数的运算实例, 用以验证三元数运算及其结果的相互契合性.

例 1　设三元数 $S=a+bi+c\phi$, 当 $c=0$ 或 $b=0$, 易知

$$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi,$$

$$(a+bi)^3=a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i,$$

$$(a+c\phi)^2=a^2-c^2i+2ac\phi,$$

收稿日期: 2010-05-31; 修订日期: 2010-07-30; * . 通讯联系人, E-mail: cttvw@shnu.edu.cn

作者简介: 王俊龙 (1959-), 男, 江苏盐城人, 副研究员, 哲学博士, 主要从事易卦数理研究.

$(a+c\Phi)^3=a^3-(2ac^2+c^3)\mathrm{i}+(3a^2c-c^3)\Phi.$

例 2 设三元数: $S_1=-1+\mathrm{i}+\Phi$, $S_2=1-\mathrm{i}+\Phi$, $S_3=1+\mathrm{i}+\Phi$, $S_4=1+\mathrm{i}-\Phi$, 考察其自乘运算, 再以平方差公式加以验证.

根据乘法运算规则, 不难得知上述 4个三元数的平方值分别如下:

$S_1{}^2=(-1+\mathrm{i}+\Phi)^2=\Phi^2=-\mathrm{i}$;

$S_2^2=(1-\mathrm{i}+\Phi)^2=-5\mathrm{i}$;

$S_3{}^2=(1+\mathrm{i}+\Phi)^2=3\mathrm{i}+4\Phi$,

$S_4{}^2=(1+\mathrm{i}-\Phi)^2=-\mathrm{i}-4\Phi$.

根据平方差公式:

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

验证上述三元数平方运算的结果.

$(1+\mathrm{i}-\Phi)^2-(-1+\mathrm{i}+\Phi)^2=$

$((1+\mathrm{i}-\Phi)+(-1+\mathrm{i}+\Phi))$

$((1+\mathrm{i}-\Phi)-(-1+\mathrm{i}+\Phi))=$

$2\mathrm{i}(2-2\Phi)=$

$4\mathrm{i}-4\mathrm{i}\Phi=-4\Phi.$

$S_4^2-S_1{}^2=-4\Phi.$

$(1-\mathrm{i}+\Phi)^2-(-1+\mathrm{i}+\Phi)^2=$

$((1-\mathrm{i}+\Phi)+(-1+\mathrm{i}+\Phi))$

$((1-\mathrm{i}+\Phi)-(-1+\mathrm{i}+\Phi))=$

$2\Phi(2-2\mathrm{i})=4\Phi-4\mathrm{i}\Phi=-4\mathrm{i}$

$S_2^2-S_1{}^2=-4\mathrm{i}$

$(1+\mathrm{i}+\Phi)^2-(1-\mathrm{i}+\Phi)^2=$

$((1+\mathrm{i}+\Phi)+(1-\mathrm{i}+\Phi))((1+\mathrm{i}+\Phi)-(1-\mathrm{i}+\Phi))=$

$2\mathrm{i}(2+2\Phi)=$

$4\mathrm{i}+4\mathrm{i}\Phi=$

$8\mathrm{i}+4\Phi.$

$S_3^2-S_2{}^2=8\mathrm{i}+4\Phi.$

$(1+\mathrm{i}-\Phi)^2-(1+\mathrm{i}+\Phi)^2=$

$((1+\mathrm{i}-\Phi)+(1+\mathrm{i}+\Phi))((1+\mathrm{i}-\Phi)-(1+\mathrm{i}+\Phi))=$

$-2\Phi(2+2\mathrm{i})=$

$-4\Phi-4\mathrm{i}\Phi=$

$-4\mathrm{i}-8\Phi.$

$S_4^2-S_3^2=-4\mathrm{i}-8\Phi.$

$(1+\mathrm{i}-\Phi)^2-(1-\mathrm{i}+\Phi)^2=$

$((1+\mathrm{i}-\Phi)+(1-\mathrm{i}+\Phi))((1+\mathrm{i}-\Phi)-(1-\mathrm{i}+\Phi))=$

$2(2\mathrm{i}-2\Phi)=$

$4\mathrm{i}-4\Phi.$

$S_4^2-S_2^2=4\mathrm{i}-4\Phi.$

因为 $S_3^2-S_2{}^2=8\mathrm{i}+4\Phi$, $S_4^2-S_3^2=-4\mathrm{i}-8\Phi$,

且 $S_4^2-S_2^2=4\mathrm{i}-4\Phi$.

所以 $S_4^2-S_2^2=(S_3^2-S_2^2)+(S_4^2-S_3^2)$

(允许消去规则).

责任编辑: 张建合

(上接第 581页)

参考文献:

[1] 杨永会, 薛梅, 蒋绪川, 等. 二-2(2-乙基己基)磷酸萃取镓(III)的机理[J]. 山东大学学报: 自然科学版, 1997, 32(3): 317-321.

[2] 郑隆鳌, 喻庆华, 熊雪良, 等. 金属离子和正辛醇对二-(2-乙基己基)磷酸钠微乳体系相行为的影响[J]. 湿法冶金, 2003, 22(4): 204-208.

[3] Bucak S, Pugh-Jones A, Lewis C, et al. *Metal nanoparticle formation in oil media using di(2-ethylhexyl) phosphoric acid* (HDEHP)[J]. Journal of Colloid and Interface Science(S0021-9797), 2008, 320(1): 163-167.

[4] Combes E, Sella C, Bauer D, et al. *A study of the formation of acid and neutral ytrium oxalate powders from precipitation-stripping reaction in a Lewis-type cell*[J]. Hydrometallurgy(S0304-386X), 1997, 46(1): 137-148

[5] 张东翔, 常玉, 徐红. 影响改性脲醛树脂性能的因素分析[J]. 中国胶粘剂, 2003, 12(1): 14-18

[6] 丁有钱, 崔安智, 杨志红, 等. HDEHP萃取法从裂变产物中分离 ^{142}La[J]. 核化学与放射化学, 2003, 25(4): 219-222

[7] 傅献彩, 沈文霞, 姚天扬. 物理化学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990

责任编辑: 张建合