

·应用技术研究·

WinPP软件在一类捕食-被捕食系统动力学研究中的应用

郭基凤^{1*}, 裴利军²

(1. 中原工学院 软件学院, 河南 郑州 450007; 2. 郑州大学 数学系, 河南 郑州 450052)

摘要:首先介绍了 WinPP 软件的概况, 然后对具有 Hassell-Varley 型功能反应的捕食-被捕食模型进行了详尽的理论分析, 并利用 WinPP 软件验证了各平衡点的稳定性. 结论表明, 边界平衡点一定是鞍点, 正平衡点在一定条件下是局部渐近稳定的. 这表明该系统不会出现某个种群灭绝的现象, 并且在一定条件下两种群会以平衡点形式共存, 即该生态系统必然会共存而不会灭绝. 这意味着该系统具有良好的生态性质——易于保持生态系统的存在和多样性. 数值模拟也展示了 WinPP 软件在研究非线性动力学方面的重要作用.

关键词: Hassell-Varley 型功能反应; 捕食-被捕食; 稳定性; WinPP 软件

中图分类号: TP393.08; O193 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-0972(2007)04-0482-04

The Application of the Software WinPP in Studying the Nonlinear Dynamics of a Class of Predator-prey Model

GUO Jifeng¹, PEILijun²

(1. Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou 450007, China;

2. Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, China)

Abstract: Firstly the software WinPP is briefly introduced in this paper. Then the predator-prey model with the Hassell-Varley functional response is analyzed in detail. Finally the stability of its equilibria is simulated by employing the software WinPP. The result implies that the boundary equilibrium must be a saddle one and the positive equilibrium is locally stable under some conditions. This means that there is not the extinction of some population and the two populations coexist in the form of equilibrium under some conditions i.e. the ecological system must coexist and never extinct. It implies that the ecological system has a very good property i.e. easy to keep its existence and biological diversity. The numerical simulation in this paper also displays the importance of the WinPP in studying the nonlinear dynamics.

Key words: Hassell-Varley functional response; predator-prey; stability; WinPP

0 引言

由于生物体都是获取资源而存在, 因此捕食-被捕食模型是任何生态系统中最基本的组分. 为了生存, 不同物种为寻找资源而竞争、进化和扩散. 如果不能得到维持生存必须的最低数量的资源, 物种将会灭绝. 但是根据不同的情况, 捕食-被捕食模型可以用来描述资源-消费者、植物-食草动物、寄生虫-寄主、肿瘤细胞-免疫系统、易感者-患者等生物

过程^[1-3]. 其中共同的特点都是描述得失的过程, 因此也可以用于描述生态以外的系统, 如经济、商业等领域中企业、消费者之间的关系及演化.

最常用的捕食-被捕食模型是具有 Michaelis-Menten 型功能反应函数的系统, 但是由于模型自身的不完善, 存在着“丰饶悖论”的破绽. 因此, 需要寻找更合适的功能反应函数. 为了解决这个问题, 并解答在自然界中普遍存在的物种灭绝现象,

收稿日期: 2007-04-26; 修订日期: 2007-08-12; * 通讯联系人, E-mail: gjf@zzti.edu.cn

基金项目: 河南省自然科学基金项目 (0411013600)

作者简介: 郭基凤 (1963-), 女, 湖北随州人, 副教授, 在读博士, 主要从事计算机网络安全及数值模拟等研究.

Arditi和 Ginzburg (1989)提出了具有率依赖的功能反应函数的捕食-被捕食模型^[4].它能够产生丰富的动力学,比前者更实际.但是存在着排除了共同灭绝平衡点的缺陷.因此,仍然需要寻找更合适的功能反应函数.事实上,在很多情况下,功能反应函数是依赖于捕食者的种群密度,因此必须考虑功能反应函数紧密依赖于捕食者的种群密度的情况. Hassell和 Varley (1969)提出了下述具有 Hassell-Varley型功能反应函数的捕食-被捕食模型^[5]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(1 - \frac{x}{K}) - \frac{cxy}{my + x}, \\ \frac{dy}{dt} = y(-D + \frac{fx}{my + x}), & (0, 1), \\ x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中: a 是 Hassell-Varley常数,反应了捕食者在捕食时组成固定数目紧密团队的紧密程度,团队越紧密, a 越小,反之,团队越稀疏, a 越大.比如,对陆地上的捕食者来说, $a = 1/2$,而对水中的捕食者来说, $a = 1/3$,对不组成团队的捕食者, $a = 1$,即率依赖的捕食-被捕食功能反应函数.所以 Michaelis-Menten型和率依赖型功能反应函数是(1)分别当 $a = 0$ 和 $a = 1$ 时的极限情况.但是实际上,大多数的捕食者在捕食中并不组成固定数目的紧密团队,因此 $a \in [1/2, 1]$.这也是本文研究的重点.其中(1)中功能反应函数的详细推导可以参看 Cosner等 (1999)的工作^[6].

W inPP软件是近年出现的一种研究非线性系统动力学的重要软件,它功能强大,简单实用,是设计用来求形式为常微分方程(组)、时滞微分方程(组)、微分代数方程(组)、Volterra积分微分方程(组)、离散动力系统、边值问题等动力系统的解的程序.通过创建一个扩展名为".ode"的文件,这个文件包含了 W inPP对动力系统数值模拟所必需的方程、参数、函数等元素,并且可以在文件中定义画图参数.其界面是基于 W in95/NT的.除了变量名称和维数不能改变、不退出不能使用新的文件以外,模拟的各个方面都是可以改变的.它具有画动力系统的相图、时间历程、Poincare截面、寻找平衡点、利用单参数区域积分和双参数区域积分来发现初值在某个区域内的动力学现象、提取数据进行数值解和解析解的对比、保存图像以加入 Latex、Word文档等强大功能,可以进行稳定性、混沌、分岔等动力学分析、验证.本文针对实际生态环境中重要的依赖于捕食者种群密度的捕食-被捕食模型

(1),研究了平衡点的个数和稳定性,然后利用 W inPP软件进行了验证.

1 平衡点的个数

考虑系统的实际意义,一般有 $f > D$.除了边界平衡点 $E_1(k, 0)$,还存在正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$.通过补充定义, $E_0(0, 0)$ 可以成为其平衡点,但是向量场在此奇异,无法用标准的稳定性分析来研究.这将是我们的工作.主要研究正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 和边界平衡点 $E_1(k, 0)$.

定理 1 如果 $f > D$, $(0, 1)$,则系统(1)存在唯一的正平衡点.

证明 由(1)之第1式,得

$$my + x = \frac{cy}{a(1 - \frac{x}{k})}, \quad (2)$$

由(1)之第2式,得

$$my + x = \frac{f}{D}x, \quad (3)$$

由(2)及(3),得

$$y = \frac{afx(1 - \frac{x}{k})}{D}, \quad (4)$$

将(4)代入(3),得

$$m(\frac{af}{D})x(1 - \frac{x}{k}) = (\frac{f}{D} - 1)x \quad (5)$$

因此正平衡点中 x 的坐标即为方程(5)之正根.显然对于 $(0, 1)$,根是介于 0和 k 之间的.以下证明方程(5)根的唯一性,即系统(1)正平衡点的唯一性.设函数

$$h(x) = m(\frac{af}{D})x(1 - \frac{x}{k}) - (\frac{f}{D} - 1)x, \quad (6)$$

则方程(5)根的唯一性等价于方程 $h(x) = 0$ 的唯一性.显然, $h(0) = 0$,下证在区间 $(0, k)$, $h(x)$ 先递增,然后递减,并且与 x 轴相交且仅相交一次.对(6)求一次和二次导数,得

$$h'(x) = ((m(\frac{af}{D})(k - 2x)x^{-1}(1 - \frac{x}{k}) / (k - x)) - \frac{f}{D} - 1), \quad (7)$$

$$h''(x) = (m(\frac{af}{D})x^{-2}(1 - \frac{x}{k})((2kx - x^2)(1 - 2) - k^2(1 -))) / (k - x)^2. \quad (8)$$

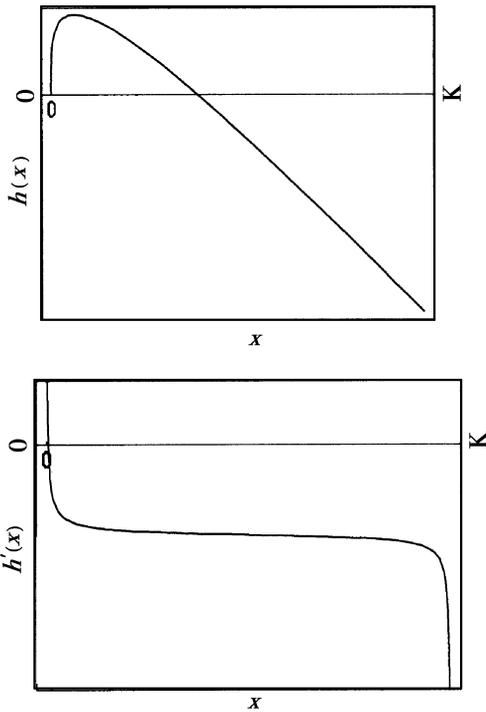


图 1 函数 $h(x)$ 及其导数 $h'(x)$ 在区间 $(0, k)$ 的图像

Fig 1 The figures of the functions $h(x)$

and its derivative $h'(x)$ in the field $(0, k)$.

下证 $h'(x)$ 为递减的, 即 $h'(x)$ 先递增, 然后递减, 并且与 x 轴相交且仅相交一次. 欲证 $h'(x)$ 为

递减, 即证 $h''(x) < 0$. 由于 $h'(x) = m \left(\frac{af}{D} \right) x^{-2} \left(1 - \frac{x}{k} \right) > 0, x \in (0, k)$, 即证 $g(x) = (2kx - x^2) \left(1 - 2 \right) - k^2 \left(1 - \right) < 0$ 分 3 种情况来证明:

1) 当 $\leq 1/2$ 时, $g(x) = -k^2 \left(1 - \right) < 0$;

2) 当 $< 1/2$ 时, $g(x) = 2(k - x) \left(1 - 2 \right) > 0, g(x)$ 递增, 因此, $g(x) < g(k) = -k^2 < 0$;

3) 当 $> 1/2$ 时, $g(x) = 2(k - x) \left(1 - 2 \right) < 0, g(x)$ 递减, 因此, $g(x) < g(0) = -k^2 \left(1 - \right) < 0$.

因此, 当 $x \in (0, k), g(x) = (2kx - x^2) \left(1 - 2 \right) - k^2 \left(1 - \right) < 0$ 进而, $h''(x) < 0$, 因此, $h'(x)$ 为递减. 又因为 $0 < < 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1} = +\infty$, 因此, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = +\infty$. 且当 $k/2 < x < k$ 时, $h'(x) < -$

$\left(\frac{f}{D} - 1 \right) < 0$. 由 $h'(x)$ 的连续性及其单调递减, 因此

$h'(x) = 0$ 存在唯一的根 x_0 . 因此也可以得到 $h(x)$ 的图像, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) > 0$ 且递增; 当 $x \in (x_0, k)$ 时, $h(x)$ 递减. 显然, $h(x_0) > 0, h(k) = -$

$\left(\frac{f}{D} - 1 \right) k < 0$, 由 $h(x)$ 的连续性及其零点定理, 方程

$h(x) = 0$ 在区间 $(0, k)$ 有唯一的根. 即系统 (1) 有唯一的正平衡点.

2 各平衡点处稳定性分析与验证

通过求系统 (1) 在各平衡点处的 Jacobian 矩阵的特征根, 可以判断其稳定性.

系统 (1) 在 $E_1(k, 0)$ 处的 Jacobian 矩阵为 $\begin{pmatrix} -a & -c \\ 0 & f-D \end{pmatrix}$, 显然为鞍点.

通过研究系统 (1) 在 $E^*(x^*, y^*)$ 处的 Jacobian 矩阵, 可以得到正平衡点处的稳定性条件.

定理 2 如果系统 (1) 满足下述充分必要条件: $\frac{cdy^*}{fx^*} - a + \frac{2ax^*}{k} > 0$, 且 $a \left(1 - \frac{2x^*}{k} \right) + \left(1 - \frac{f}{D} \right) \left(\frac{D^2 y^*}{f^2 x^*} + \frac{D^2}{f} \right) < 0$, 则正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 局部稳定.

证明可以根据 Routh-Hurwitz 定理来证明, 在这里略去. 以下利用软件 WinPP 进行验证.

如果满足定理 2 的条件, 系统 (1) 的正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 是局部稳定的. 如取下述参数: $a = 0.5, k = 1.2, c = 0.1, m = 0.3, f = 0.2, D = 0.02, = 0.9$, 则系统存在一个正平衡点 $E^*(0.29, 10.89)$, 满足定理 2 中的条件, 因此, 此正平衡点局部稳定. WinPP 验证发现, 系统 (1) 存在着稳定的平衡点, 与理论分析相符 (见图 2), 其中初值为 $(0.1, 1) \times (7, 14)$ 上的任意 16 个点, 从这些点出发的轨线都吸引到了正平衡点 $E^*(0.29, 10.89)$. 但是如果不能满足定理 2 的条件, 系统 (1) 的正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 必然不是局部稳定的. 如当其他参数不变, 仅变化 $\frac{f}{D}$ 之值, $\frac{f}{D} = 0.6$ 时, 则系统存在一个正平衡点 $E^*(0.066, 3.11)$. 但是定理 2 中的第 2 个不等式不成立, 因此, 正平衡点 $E^*(0.066, 3.11)$ 不稳定, 又由于 $E_1(k, 0)$ 为鞍点, 因此轨线可能被吸引到零平衡点或者稳定的周期解. WinPP 验证发现, 系统 (1) 存在着稳定的周期运动, 与理论分析相符 (见图 3), 其中初值为 $x(0) = 1, y(0) = 3$. 数值模拟表明本文的理论分析是正确的.

3 结论

通过本文的理论分析和数值模拟, 可以得到以下结论:

1) WinPP 软件在验证、分析非线性动力学 (包括稳定性、分岔和混沌) 方面确实功能强大, 简便

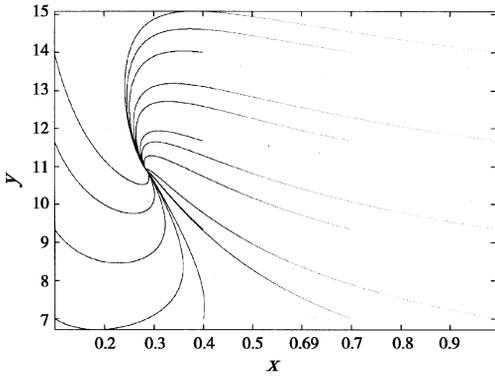


图2 系统(1)当参数 $a=0.5, k=1.2, c=0.1, m=0.3, f=0.2, D=0.02, \beta=0.9$ 时, 正平衡点 $E^*(0.29, 10.89)$ 的稳定性

Fig 2 The stability of the positive equilibrium

$E^*(0.29, 10.89)$ in system (1) for the parameters $a=0.5, k=1.2, c=0.1, m=0.3, f=0.2, D=0.02, \beta=0.9$

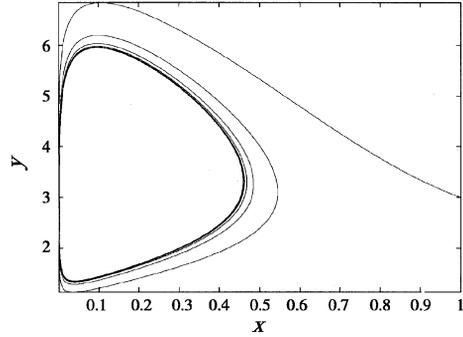


图3 系统(1)当参数 $a=0.5, k=1.2, c=0.1, m=0.3, f=0.2, D=0.02, \beta=0.6$ 时,平衡点 $E^*(0.066, 3.11)$ 的不稳定性与稳定周期解的产生

Fig 3 The instability of the positive equilibrium

$E^*(0.066, 3.11)$ and the appearance of the stable periodic solution in system (1) for the parameters $a=0.5, k=1.2, c=0.1, m=0.3, f=0.2, D=0.02, \beta=0.6$

实用.可以预期它在推动常微分方程、非线性动力学发展方面将会大有作为.

2)理论分析和数值模拟的结果表明,边界平衡点必然是鞍点,正平衡点在一定条件下是局部稳定的.这表明该系统不会出现某个种群灭绝的现象,并且在一定条件下两种群会以平衡点形式共存,即该生态系统必然会共存而不会灭绝.这意味

着由于具有 Hassell-Varley型功能反应函数,该系统具有良好的保持生态系统平衡和多样性的性质.这是生物数学界关注的一个重要问题.这不仅在生态学中对于保持生态系统的存在和多样性有重要意义,而且在商业、经济等领域对于研究企业、消费者之间的关系及其演化等课题有深刻含义.我们将进一步考虑其机理.

参考文献:

- [1] FREEDMAN H I *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology* [M]. New York: Marcel Dekker, 1980.
- [2] HARRINGTON G, SMITH F E, SLOBODKIN L B. *Community structure population control and competition* [J]. *American Naturalist*(S0003-0147), 1960 94: 421-425.
- [3] ROSENZWEIG M L. *Paradox of Enrichment: Destabilization of Exploitation Systems in Ecological Time* [J]. *Science*(S0036-8075), 1969 171: 385-387.
- [4] ARDITIR, GNZBURGL R. *Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence* [J]. *J Theor Biol*(S0022-5193), 1989 139: 311-326.
- [5] HASSELL M P, VARLEY G C. *New Inductive Population Model for Insect Parasites and its Bearing on Biological Control* [J]. *Nature*(S0028-0836), 1969 223: 1133-1136.
- [6] COSNER C, DEANGELIS D L, AULT J S, et al. *Effects of Spatial Grouping on the Functional Response of Predators* [J]. *Theor Pop Biol*(S0040-5809), 1999 56: 65-75.
- [7] 郭红建. 一类具有相互干扰的两种群捕食系统 [J]. *信阳师范学院学报:自然科学版*, 2006, 19(3): 253-255.

责任编辑:张建设