信阳师范学院学报（自然科学版） Jouranl of Xinyang Teachers College
1993年 第6卷 第1期 （Natural Science Edition）Vol. 6 No. 1 1993

G_2型单代数群的单模扩张群

刘 家 春

摘 要 设G是K上G_2型单连通单代数群，K是特征为素数p≥13的代数闭域，G_1是G的第一Frobenius态射F的核，本文通过计算Weyl模Jantzen滤过的第二层有无L(λ)因子来确定具有小最高权的单模扩张群：$Ext^1_{G}(L(\mu), L(\lambda))$，$\mu\in X(T)$，$\lambda\in X_1(\tau)$且$\lambda\uparrow\uparrow\mu\uparrow\uparrow\omega$。$\lambda+2p\rho$。

关键词 代数群，Jantzen滤过，扩张群

1 一些记号

设B是G的$Borel$子群，T是包含在B内的极大环面，G关于T的根记为R，R^+是正根集，S是单根集，G关于T的特征标群记为$X(T)$，G的$Weyl$群记为W，W自然地作用在$X(T)$上，定义W点作用于$X(T)$上：$w\cdot\lambda=w(\lambda+\rho)-\rho$对$\forall\ \lambda\in X(T)$ $w\in W$，这里ρ是正根之半和。

设$W_p=\langle S\alpha,_{np}\mid\alpha\in R,\ n\in Z\rangle$是$G$的仿射$Weyl$群，

定义：$S\alpha,_{np}\cdot\lambda=S\alpha\cdot\lambda+np\alpha$对$\forall\ \lambda\in X(T)$，

设$X(T)_+=\{\lambda\in X(T)\mid(\lambda,\alpha^\vee)\geqslant 0,\ \forall\alpha\in S\}$是支配权集，$\alpha^\vee$是$\alpha$的余集，对$\lambda\in X(T)_+$，$L(\lambda)$是单$G$一模，$V(\mu)$是$Weyl$模，他们都以$\lambda$为最高权，设$X_1(T)=\{\lambda\in X(T)\mid 0\leqslant(\lambda,\alpha^\vee)<P,\ \forall\ \alpha\in S\}$是限制支配权集，$\lambda=r\lambda_1+s\lambda_2$，$\in X(T)$简记$(r,s)$，$\lambda_1$，$\lambda_2$是基本支配权。

我们关心的是G为G_2型的情形，这时$S=\{\alpha_1,\ \alpha_2\}$其中$\alpha_1$为短根，$\alpha_2$为长根$R^+=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2,\ 2\alpha_1+\alpha_2,\ 3\alpha_1+\alpha_2,\ 3\alpha_1+2\alpha_2\}$ $(\lambda_i,\alpha_j^\vee)=\delta_{ij}$则$\lambda_1=2\alpha_1+\alpha_2$，$\lambda_2=3\alpha_1+2\alpha_2$，对$\lambda=(r,s)\in X(T)_+$，$Weyl$模$V(\lambda)$的维数是$dimV(\lambda)=\frac{1}{120}(r+1)(s+1)(r+s+2)(r+2s+3)(r+3s+4)(2r+3s+5)$

2 Weyl模的Jantzen滤过

在〔8〕中$Jantzen$对每个$Weyl$模$V(\lambda)$，$\lambda\in X(T)_+$构造一个滤过即：

$V(\lambda)=V(\lambda)^0\supset V(\lambda)^1\supset V(\lambda)^2\supset\cdots\supset V(\lambda)^i\supset\cdots V(\lambda)^i$是$V(\lambda)$的子模，在$G_2$型的情形下，$V(\lambda)^i/V(\lambda)^{i+1}$是完全可约 的，即$V(\lambda)$的$Jantzen$滤过正好是$V(\lambda)$的根序列，$Jantzen$在对$P$作了一些限制时，然后$Andersen$在〔5〕中对所有$P$证明了$Weyl$滤过的形式特征标满足和公式：

$$\sum_{i>0} Chv(\lambda)^i=\sum_{\alpha\in R}\sum_{0<mp<(\lambda+\nu,\alpha^\vee)} \nu_p(mp)\cdot Chv(S_{\alpha,mp}\cdot\lambda)$$

这里ν_p是整数的P—$adic$赋值，即当$p\nmid q$时，$\nu_p(p^nq)=n$，并规 定$Chv(w\cdot\lambda)=(-1)^{l(\omega)}Chv(\lambda)$，$l(w)$为$W$的长度。

3　关于扩张群的一些结果

设λ，$\mu\in X(T)_+$，则有唯一的分解$\lambda=\lambda_0+P\lambda_1$，$\mu=\mu_0+P\mu_1$，$\lambda_0$，$\mu_0\in X_1(T)$，$\lambda_1$，$\mu_1\in X(T)_+$由$Steinberg$张量积定理：$L(\lambda)\cong L(\lambda_0)\otimes L(\lambda_1)^{[1]}$　$L(\mu)\cong L(\mu_0)\otimes L(\mu_1)^{[1]}$考虑五项正合列：

$$0\longrightarrow Ext^1_{G/G_1}(M_1^{[1]},Hom_{G_1}(M_0,E))\rightarrow Ext^1_G(M_0\otimes M_1^{[1]},E)\rightarrow$$
$$Hom_{G/G_1}(M_1^{[1]},Ext^1_{G_1}(M_0,E))\rightarrow Ext^2_{G/G_1}(M_1^{[1]},Hom_{G_1}$$
$$(M_0,E))\rightarrow Ext^2_G(M_0\otimes M_1^{[1]},E)$$

令$M_1=L(\mu_1)$，$M_0=L(\mu_0)$，$E=L(\lambda)$则有：

$$EXt^1_G(L(u),L(\lambda))\cong\begin{cases}Hom_{G/G_1}(L(u_1)^{[1]},Ext^1_{G_1}(L(u_0),L(\lambda_0))\otimes L(\lambda_1)^{[1]}, & \lambda_0\neq u_0\\ Ext^1_G(L(u_1),L(\lambda_1)) & \lambda_0=u_0\end{cases}$$

4　两个单G—模的扩张

设$\lambda=r\lambda_1+S\lambda_2=(r,s)$则容易标出。

$S_{\alpha_1,np}\cdot\lambda=(2np-r-2,-np+r+s+1)$
$S_{\alpha_2,np}\cdot\lambda=(-3np+r+3s+3,2np-s-2)$
$S_{\alpha_1+\alpha_2,np}\cdot\lambda=(-np+2r+3s+4,np-r-2s-4)$
$S_{2\alpha_1+\alpha_2,np}\cdot\lambda=(np-r-3s-5,S)$
$S_{3\alpha_1+\alpha_2,np}\cdot\lambda=(3np-2r-3s-6,-np+r+2s+2)$
$S_{3\alpha_1+2\alpha_2,np}\cdot\lambda=(r,np-r-s-3)$

对λ，$u\in X(T)$，若存在$\alpha\in R^+$，$n\in N$使$(\mu+\rho,\alpha^\vee)\geqslant np$且$\lambda=S_{\alpha,np}\cdot\mu$则记$\lambda\uparrow\mu$，此时有$\lambda\leqslant\mu$，即$\mu-\lambda$是正根之和，如果对$\lambda$，$u\in X(T)$存在，$u_1$，$u_2\cdots$，$u_n$

$\in X(T)$ 使 $\lambda=u_1\uparrow u_2\uparrow\cdots\uparrow u_n=\mu$ 则称λ强连接于μ，记为 $\lambda\uparrow\uparrow\mu$。设 $\lambda\in X_1(T)$，$\mu\in X(T)_+$，使得 $\lambda\uparrow\uparrow u-p\rho\uparrow\uparrow w_0\cdot\lambda+P\rho$，如果λ是 P—正则权，可以通过计算 $V(u)$ 的Jantzen滤过的第二层来确定所有的 $Ext^1_G(L(u),L(\lambda))$，如果λ是 P—奇异权，可以用ad-hoc方法来确定所有的 $Ext^1_G(L(u),L(\lambda))$

令 $R(u)=radV(u)$ 即 $V(u)/_{radV(u)}\cong L(u)$ 则有正合列：$0\to R(u)\to V(u)\to L(u)\to 0$ 从而有长正合列：$0\to Hom_G(L(u),L(\lambda))\to Hom_G(V(u),L(\lambda))\to Hom_G(R(u),L(\lambda))\to Ext^1_G(L(u),L(\lambda))\to Ext^1_G(V(u),L(\lambda))\to\cdots$

容易证明 $Ext^1_G(V(u),L(\lambda))=0$ 又当 $\lambda\neq\mu$ 时

$Hom_G(V(u),L(\lambda))=0$，所以有 $EXt^1_G(L(u),L(\lambda))\cong Hom_G(R(u),L(\lambda))$，所以若 $L(\lambda)$ 出现在 $V(u)$ 的Jantzen滤过的第二层即 $L(\lambda)$ 是 $R(u)$ 的商模，则 $Hom^1_G(R(u),L(\lambda))\neq 0$ 且 $L(\lambda)$ 作 $R(u)$ 的商模出现 k 次，即 $L(\lambda)$ 在 $V(u)$ 的Jantzen滤过的第二层出现 k 次，则 $Ext^1_G(L(u),L(\lambda))\cong Hom(R(u),L(\lambda))=\overbrace{K\oplus\cdots\cdots\oplus K}^{k\text{次}}$

现在我们求出的 $V(u)$ 的Jantzen滤过的第二层没有一个 $L(\lambda)$ 出现的次数大于1，所以有：

$$Ext^1_G(L(u),L(\lambda))\cong\begin{cases}K\text{若}L(\lambda)\text{在}V(u)\text{的Jantzen滤过第二层出1次}\\0\text{若}L(\lambda)\text{在}V(u)\text{的Jantzen滤过第二层不出现}\end{cases}$$

令 $B(\lambda)=\{u\in X(T)_+\mid\lambda\uparrow\uparrow\mu-P\rho\uparrow\uparrow w_0\cdot\lambda+P\rho\ EXt^1_G(L(u),L(\lambda))=K\}$ 我们把各种可能位置上的 $\lambda\in X_1(T)$ 所对应的 $B(\lambda)$ 列在下表：

$\lambda=(r,s)\in X_1(T)$	$B(\lambda)$
$2r+3s<p-5$	$(p-r-3-5,s)$ $(r+3s+3,p-s-2)$ $(2p-r-2,r+s+1)$ $(p+2r+3s+4,p-r-2s-4)$ $(r+3s+3,2p-s-2)$
$2r+3s>p-5$ $r+3s<p-4$	$(-p+2r+3s+4,p-r-2s-4)$ $(2p-2r-3s-6,r+2s+2)$ $(2p-r-2,r+s+1)$ $(r+3s+3,2p-s-2)$ $(p-r-3s-5,s)$ $(r+3s+3,\ p-s-2)$
$r+3s>p-4$ $r+2s<p-3$	$(r,p-s-r-3)$ $(p-r-2,r+s+1)$ $(2p-2r-3s-6,r+2s+2)$ $(r+3s+3,\ p-s-2)$ $(-p+2r+3s+4,\ p-r-2s-4)$ $(2p-r-2,\ r+s+1)$

$r+2s>p-3$ $2r+3s<2p-5$	$(2p-r-3s-5,\ s)$ $(-p+r+3s+3,\ p-s-2)$ $(p-r-2,\ r+s+1)$ $(r,\ p-r-s-3)$ $(r+3s+3,\ p-s-2)$ $(2p-r-2,\ r+s+1)$ $(2r+3s+4,\ 2p-r-2s-4)$
$r+s<p-2$ $2r+3s>2p-5$ $r+3s<2p-4$	$(-2p+2r+3s+4,\ 2p-r-2s-4)$ $(3p-2r-3s-6,\ -p+r+2s+2)$ $(-p+r+3s+3,\ p-s-2)$ $(r+3s+3,\ p-s-2)$ $(2p-r-2,\ r+s+1)$ $(2p-r-3s-5,\ s)$
$r+3s>2p-4$ $r+s<p-2$	$(3p-2r-3s-6,\ -p+r+2s+2)$ $(-p+r+3s+3,\ p-s-2)$ $(2p-r-2,\ r+s+1)$ $(-2p+2r+3s+4,\ 2p-r-2s-4)$
$r+s>p-2$ $r+3s<2p-4$	$(-2p+2r+3s+4,\ 2p-r-2s-4)$ $(2p-r-2,\ -p+r+s+1)$ $(r+3s+3,\ p-s-2)$ $(3p-2r+3s-6,\ -p+r+2s+2)$
$2r+3s<3p-5$ $r+2s>p-2$ $r+3s<2p-4$	$(2p-r-2,\ -p+r+s+1)$ $(3p-r-3s-5,\ s)$ $(-p+r+3s+3,\ p-s-2)$ $(-2p+2r+3s+4,\ 2p-r-2s-4)$ $(3p-2r-3s-6,\ -p+r+2s+2)$ $(-2p+r+3s+3,\ p-s-2)$
$r+2s<2p-3$ $2r+3s>3p-5$	$(2p-r-2,\ -p+r+s+1)$ $(r,\ 2p-r-s-3)$ $(-p+r+3s+3,\ p-s-2)$ $(-2p+2r+3s+4,\ 2p-r-2s-4)$ $(3p-r-3s-5,\ s)$ $(-2p+r+3s+3,\ p-s-2)$ $(p-r-2,\ -p+r+s+1)$
$r+3s<3p-4$ $r+2s>2p-3$	$(2p-r-2,\ -p+r+s+1)$ $(-3p+2r+3s+4,\ 3p-r-2s-4)$ $(r,\ 2p-r-s-3)$ $(4p-2r-3s-6,\ -2p+r+2s+2)$ $(-p+r+3s+3,\ p-s-2)$ $(p-r-2,\ -p+r+s+1)$
$2r+3s<4p-5$ $r+3s>3p-4$	$(4p-r-3s-5,\ s)$ $(-3p+r+3s+3,\ 2p-s-2)$ $(2p-r-2,\ -p+r+s+1)$ $(-3p+2r+3s+4,\ 3p-r-2s-4)$ $(4p-2r-3s-6,\ -2p+r+2s+2)$ $(-3p+r+3s+3,\ p-s-2)$
$2r+3s>4p-5$	$(-3p+2r+3s+4,\ 3p-r-2s-4)$ $(4p-r-3s-5,\ s)$ $(-3p+r+3s+3,\ p-s-2)$ $(2p-r-2,\ -p+r+s+1)$ $(-3p+r+3s+3,\ 2p-s-2)$
$2r+3s=p-5$	$(p-r-2,\ p-s-2)$ $(2p-r-2,\ r+s+1)$ $(2p-1,\ r+s+1)$ $(p-r-2,\ 2p-s-2)$
$r+3s=p-4$	$(3s+2,\ p-s-2)$ $(p-1,\ p-s-2)$ $(p+3s+2,\ p-2s-3)$ $(p-1,\ 2p-s-2)$
$r+2s=p-3$	$(2s+1,\ p-s-2)$ $(s,\ p-1)$ $(p+s,\ p-s-2)$

	$(p+2s+1,\ p-s-2)$
$2r+3s=2p-5$	$(p-r-2,\ p-s-2)(p-r-2,\ r+s+1)(2p-r-2,\ p-s-2)$ $(2p-r-2,\ r+s+1)(2p-1,\ r+s+1)$
$r+3s=2p-4$ $S<\frac{p-2}{2}$	$(p-1,\ p-s-2)(2p-1,\ p-s-2)$ $(3s+2,\ 2p-2s-3)(-p+3s+2,\ p-s-2)$
$r+s=p-2$ $S<\frac{p-2}{2}$	$(s,\ p-s-2)(2s+1,\ p-s-2)(p+s,\ p-1)$ $(p+2s+1,\ p-s-2)$
$r+s=p-2$ $S>\frac{p-2}{2}$	$(2s+1,\ p-s-2)(p+s,\ p-1)$ $(S,\ p-s-2)$
$r+3s>2p-4$ $S<\frac{p-2}{2}$	$(3s+2,\ p-2s-3)(2p-1,\ p-s-2)(-p+3s+2,\ p-s-2)$
$r=p-1$ $0\leqslant S<\frac{p-3}{3}$	$(3s+2,\ p-2s-3)(p+3s+2,\ p-s-2)$
$2r+3s=3p-5$	$(2p-r-2,\ -p+r+s+1)(p-1,\ -p+r+s+1)$ $(p-r-2,\ p-s-2)(2p-r-2,\ p-s-2)$
$r=p-1$ $\frac{p-3}{3}<S<\frac{p-2}{2}$	$(p-1,\ p-s-2)(3s+2,\ p-s-2)(3s+2,\ p-2s-3)$ $(-p+3s+2,\ p-s-2)$
$r+2s=2p-3$	$(2s+1,\ p-s-2)(p+s,\ p-s-2)$
$r=p-1$ $\frac{p-2}{2}<S<\frac{2p-3}{3}$	$(-p+3s+2,\ 2p-2s-3)(3s+2,\ p-s-2)$ $(p-1,\ p-s-2)$
$r+3s=3p-4$	$(-p+3s+2,\ 2p-2s-3)(-2p+3s+2,\ 2p-2s-3)$ $(2p-1,\ p-s-2)(-2p+3s+2,\ p-s-2)$
$2r+3s=4p-5$	$(2p-r-2,\ -p+r+s+1)(p-1,\ -p+r+s+1)$ $(p-r-2,\ p-s-2)(p-r-2,\ 2p-s-2)$
$S=p-1$	$(2p-r-2,\ r)(p-r-2,\ p-1)(p-2r-3,\ r)$

$0 \leqslant r < \frac{p-2}{2}$	
$S=p-1$ $\frac{p-2}{2} < r < p-1$	$(2p-r-2,\ r)\ (p-r-2,\ p-1)$
$r=p-1$ $\frac{2p-1}{3} < s < p-1$	$(-2p+3s+2,\ 2p-s-2)\ (-p+3s+2,\ 2p-2s-3)$ $(-2p+3s+2,\ p-3-2)$

参 考 文 献

1 Anderstn. H·H, Jantzens filtrations of weyl modulex Math. Z 194 (1987) 127—142

2 ———the Strong Linkage Principle J. Reine Angew Math 315 (1980) 53—59

3 ———Extensions of simple modules for finite Chevalley group. J. Algebra 111 (1987) 388—403

4 ———Extensions of modules for algebraie groups Amer J. Math. 206 (1984), 489—504

5 ———Filtrations of cohomology modules for Chevalley group, Ann. Sci Ecole Norm Sup. 16 (1983) 495—528

6 Cline E. Ext^1 for SL_2 comm in Alg 7 (1979) 107—111

7 Jantzen. J. C module representations of reductive groups Lecture Notes in Math 1185 (1986) 118—154

8 ———Weyl modules for groups of Lie type Finite Simple Groups Ⅱ Academic Press London (1980) 291—300

9 ———Darstellungen halbeinfacer Gruppen und ihere Frobenius kerne J. keine Angew Math 317 (1980) 157—199

10 Ye. J. C Filtrations of principal indecomposable Modules of Frobenius Kernels of reducfive groups Math. Z 189 (1985) 515—527

11 ———Extensions of simple modules for the group SP (4. K). J. London Math Soc (2) 41 (1990) 51—62

12 ———Extensions of simple modules for the Group SP (4, K) (Ⅱ). Chines Sci Ball Vol 35 No. 6 (1990) 450—454

13 Yehia S. EL. B. Extensions of Simple modules for the universal Chevalley group and its parabolic subgroups, Ph. D Thesis of Warwick University 1982

Extensions of Simple Modulex for the Simple Algebraic Group of Type G_2

Liu jiachun

Abstract

Let G be simple counected simple algebraic Group of type G_2 over on algebraicly closed field K of characteristic $p \geqslant 13$ and G_1 the kernel of the frobenius morphism F on G, in the present paper we show how one can obtain the extensions $\mathrm{Ext}_G^1(L(u), L(\lambda))$, $\mu \in X(T)_+$, $\lambda \in X_1(T)$ of two simple modules for G by computing the second layer in the Jantzen filtration for weyl moduley $V(u)$.

Key words: Algebraic group, Jantzen filtration, Extonsion Group