信阳师范学院学报: 自然科学版
第 24卷 第 1期 2011年 1月

Journal of Xinyang Normal University
Natural Science Edition Vol. 24 No. 1 Jan. 2011

DOI: 10.3969/j.issn.1003-0972.2011.01.009

图的减边控制数的一些新下界

孔祥阳*, 徐保根, 陈 悦

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘 要: 在已有减边控制函数定义的基础上, 引入了新的控制参数——边度, 并利用分类的方法对文献[7]的问题 2进行了探索, 得到了一般图的关于边数的减边控制数的若干下界.

关键词: 减边控制函数; 减边控制数; 减边全控制函数; 减边全控制数

中图分类号: O157.5 文献标志码: A 文章编号: 1003-0972(2011)01-0035-03

Some New Bounds on the Minus Edge Domination Numbers in Graphs

KONG Xiang-yang*, XU Bao-gen, CHEN Yue

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: A new domination parameter-edge degree was introduced on the basis of the definition of minus edge domination function. The question 2 in paper [7] was investigated using the method of classification, and some lower bounds of the minus edge domination numbers of graphs was obtained.

Key words: minus edge dominating function; minus edge domination number; signed edge dominating function; signed edge domination number

0 引言

本文所用到的符号和术语若无特别说明则均与文献[1]相同, 文中考察的图均为无向简单图.

在图 $G=(V,E)$中, $V=V(G)$和 $E=E(G)$分别表示图 G的顶点集和边集. 图 G中的任意一条边 e在 G中的边度是指与 e相连的边的条数, 记为 $d'_G(e)$, 在不致混淆的情况下可简记为 $d'(e)$. 如果 $e\in E(G)$, 那么 $N_G(e)$表示 G中和 e相邻的边的集合, 并称为边 e的边邻域. $N_G[e]=N_G(e)\cup\{e\}$称为 e的闭边邻域. 为方便叙述, 我们分别将 $N_G(e)$和 $N_G[e]$简记为 $N(e)$和 $N[e]$.

1996年, 加拿大著名图论专家 E. J. Cockayne[2] 等人引入了图的许多不同类型的控制概念及其变化形式. 1998年, 美国图论学者 W. T. Haynes等人[3] 较为全面而又系统地总结了近些年图论中关于图的点控制问题方面的一些重要研究成果. 为了进一步丰富和完善图的控制理论内容, 我们将由对图的点控制问题的研究转向对图的边控制问题的研究, 并取得了一些研究成果. 例如, 图的符号边控制[4-6]、减边控制[7-8] 等. 文献[7] 中的问题 2为:

问题 2[7] 如何确定 $\phi(m)=\min\{\gamma'_m(G)\mid G$为一个图且 $|E(G)|=m\}$的确切值?

对于在图 $G=(V,E)$上定义的一个函数 $f: E\to R$和 G的一个子集 $S\subseteq E(G)$, 记

$$f(S)=\sum_{e\in S}f(e).$$

1 定义及引理

定义[7] 设 $G=(V,E)$为一个非空图, 一个函数 $f: E\to\{-1,0,1\}$被称为图 G的一个减边控制函数, 如果对于 G中每一条边 e均有 $\sum_{e'\in N[e]}f(e')\geqslant 1$成立.

图 G的减边控制数定义为 $\gamma'_m(G)=\min\{\sum_{e\in E(G)}f(e)\mid f$为图 G的减边控制函数$\}$, 并且对于任意空图 $G=\overline{K_n}$, 则定义 $\gamma'_m(\overline{K_n})=0$.

若将上述定义中的函数 $f: E\to\{-1,0,1\}$分别改为函数 $f: E\to\{-1,1\}$和函数 $f: E\to\{0,1\}$, 其他条件不变, 则得到图 G的符号边控制数 $\gamma'_s(G)$和边控制数 $\gamma'(G)$. 由此可见, $\gamma'_s(G)$和 $\gamma'(G)$均可看作是 $\gamma'_m(G)$的一种特例. 因此我们得到下面的引理:

引理 1 对任意的图 G, 均有 $\gamma'_m(G)\leqslant\gamma'_s(G)$.

引理 2 对任意的图 G, 有 $\gamma'_m(G)\leqslant\gamma'(G)$.

2 主要结果

定理 1 设图 G是一个无孤立点的连通图, 且 $|E(G)|=m$,

收稿日期: 2010-06-07; 修订日期: 2010-09-25; *. 通讯联系人, E-mail: kongxiangyangxyz@163.com

基金项目: 国家自然科学基金项目(11061014); 江西省教育厅科研项目(GJJ09215)

作者简介: 孔祥阳(1985-), 男, 河南鲁山人, 硕士研究生, 研究方向为图的控制理论.

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

则其减边控制数为

$$\gamma_m'(G) \geqslant \lceil \sqrt{8m-7}-m \rceil$$

证明 当$m=0$时, 显然$\gamma_m'(G)=0$当$m=1,2,3$时, 显然$\gamma_m'(G)=1$于是令

$M=\{e\in E(G)\mid f(e)=-1\}$,

$P=\{e\in E(G)\mid f(e)=1\}$,

$Q=\{e\in E(G)\mid f(e)=0\}$.

设$M=\{e_i\mid 1\leqslant i\leqslant r\}$, $P=\{e_j\mid 1\leqslant j\leqslant p\}$, $Q=\{e_k\mid 1\leqslant k\leqslant q\}$, 则$|M|=r\geqslant 1$, $|P|=p\geqslant 2$, $|Q|=q\geqslant 1$, 从而$m=r+p+q\geqslant 4$. 对任意的边$e_i\in M$, 记

$N(e_i)\cap M=M_i$, $N(e_i)\cap P=P_i$, $N(e_i)\cap Q=Q_i$.

同理, 对于边$e_j\in P$, 有

$N(e_j)\cap M=M_j$, $N(e_j)\cap P=P_j$, $N(e_j)\cap Q=Q_j$.

对于边$e_k\in Q$, 有

$N(e_k)\cap M=M_k$, $N(e_k)\cap P=P_k$, $N(e_k)\cap Q=Q_k$.

因为所有-1边所连接的$+1$边总数与所有$+1$边所连接的-1边总数相等, 即有

$$\sum_{i=1}^{r}|P_i|=\sum_{j=1}^{p}|M_j|, \tag{1}$$

同理有

$$\sum_{k=1}^{q}|P_k|=\sum_{j=1}^{p}|Q_j|, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{q}|M_k|=\sum_{i=1}^{r}|Q_i|. \tag{3}$$

又由定义知对任意的边$e_i\in M$, 有

$$|M_i|+2\leqslant|P_i|,$$

于是对所有的$e_i\in M$, $1\leqslant i\leqslant r$有

$$2r+\sum_{i=1}^{r}|M_i|=\sum_{i=1}^{r}(|M_i|+2)\leqslant\sum_{i=1}^{r}|P_i|. \tag{4}$$

对任意的边$e_j\in P$, 有$|M_j|\leqslant|P_j|$, 从而对所有的$e_j\in P$, $1\leqslant j\leqslant p$有

$$\sum_{j=1}^{p}|M_j|\leqslant\sum_{j=1}^{p}|P_j|. \tag{5}$$

对任意的边$e_k\in Q$, $|M_k|+1\leqslant|P_k|$, 从而对所有的$e_k\in Q$, $1\leqslant k\leqslant q$有

$$q+\sum_{k=1}^{q}|M_k|=\sum_{k=1}^{q}(|M_k|+1)\leqslant\sum_{k=1}^{q}|P_k|. \tag{6}$$

由(1)、(4)和(5)得

$$2r\leqslant 2r+\sum_{i=1}^{r}|M_i|\leqslant\sum_{j=1}^{p}|P_j|\leqslant p(p-1),$$

从而

$$p\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{8r+1}+\frac{1}{2},$$

又因为$r+p+q=m$, 所以

$$m=r+p+q\geqslant$$

$$r+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8r+1})+q\geqslant$$

$$r+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8r+1}.$$

令$x=\sqrt{8r+1}$, 即$r=\frac{x^2-1}{8}$, 代入上式有

$$x\leqslant\sqrt{8m-7}-2$$

最后得图G的减边控制数为

$$\gamma'(G)=p-r=m-q-2r\geqslant$$

$$-r+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8r+1}=$$

$$-\frac{1}{8}(x-2)^2+\frac{9}{8}=\sqrt{8m-7}-m.$$

因为$\gamma_m'(G)$只能取整数, 所以$\gamma_m'(G)\geqslant\lceil\sqrt{8m-7}-m\rceil$

当$q=0$时, f为图G的符号边控制函数, 由引理1知上式成立.

当$r=0$时, f为图G的一般边控制函数, 由引理2知上式也成立. 证毕

定理 2 对任意具有m条边的连通图G, 有

$$\gamma_m'(G)\geqslant\frac{2+\delta'-\Delta'}{2+\delta'+\Delta'}m.$$

证明 设f为图G的一个减边控制函数. 同定理1, 令

$M=\{e\in E(G)\mid f(e)=-1\}$,

$P=\{e\in E(G)\mid f(e)=1\}$,

$Q=\{e\in E(G)\mid f(e)=0\}$.

于是$E(G)=M\cup P\cup Q$. 设

$$M=M_{\Delta'}\cup M_{\delta'}\cup M_{\theta},$$

且$|M|=|M_{\Delta'}|+|M_{\delta'}|+|M_{\theta}|$, 其中

$M_{\Delta'}=\{e\in M\mid d'(e)=\Delta'\}$,

$M_{\delta'}=\{e\in M\mid d'(e)=\delta'\}$,

$M_{\theta}=\{e\in M\mid \delta'\leqslant d'(e)\leqslant\Delta'-1\}$.

同理可令$P=P_{\Delta'}\cup P_{\delta'}\cup P_{\theta}$, 且

$|P|=|P_{\Delta'}|+|P_{\delta'}|+|P_{\theta}|$, $Q=Q_{\Delta'}\cup Q_{\delta'}\cup_{\theta}$,

且$|Q|=|Q_{\Delta'}|+|Q_{\delta'}|+|Q_{\theta}|$. 设

$$E_i=M_i\cup P_i\cup Q_i,\ i\in\{\Delta',\delta',\theta\},$$

则$E(G)=E_{\Delta'}\cup E_{\delta'}\cup E_{\theta}$, 于是有

$$m=|E_{\Delta'}|+|E_{\delta'}|+|E_{\theta}|.$$

根据减边控制函数的定义知, 对G中任一条边e都有

$$\sum_{e'\in N[e]}f(e')\geqslant 1,$$

故对G中所有的边有

$$\sum_{e\in E(G)}\sum_{e'\in N[e]}f(e')\geqslant m,$$

即

$$\sum_{e\in E(G)}f(e)(d'(e)+1)\geqslant m,$$

于是有

$$\sum_{e\in P_{\Delta'}}(d'(e)+1)+\sum_{e\in P_{\delta'}}(d'(e)+1)+$$

$$\sum_{e\in P_{\theta}}(d'(e)+1)-\sum_{e\in M_{\Delta'}}(d'(e)+1)-$$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sum_{e\in M_{\delta'}}(d'(e)+1)-\sum_{e\in M_\theta}(d'(e)+1)\geqslant m.$$

由上述记法知

$$(\Delta'+1)|P_{\Delta'}|+(\delta'+1)|P_{\delta'}|+\Delta'|P_\theta|-(\Delta'+1)|M_{\Delta'}|-(\delta'+1)|M_{\delta'}|-(\delta'+2)|M_\theta|\geqslant m. \quad (7)$$

又因为 $|P_i|=|E_i|-|M_i|-|Q_i|$, $i\in\{\Delta',\delta',\theta\}$,代入(7)后消去 $|P_{\Delta'}|$, $|P_{\delta'}|$ 和 $|P_\theta|$ 有

$$\begin{aligned}\Delta' m\geqslant\ & 2(\Delta'+1)|M_{\Delta'}|+2(\delta'+1)|M_{\delta'}|+\\&(\Delta'+\delta'+2)|M_\theta|+(\Delta'+1)|Q_{\Delta'}|+\\&(\delta'+1)|Q_{\delta'}|+\Delta'|Q_\theta|+\\&(\Delta'-\delta')|E_{\delta'}|+|E_\theta|.\end{aligned} \quad (8)$$

再用 $|E_i|=|P_i|+|M_i|+|Q_i|$, $i\in\{\delta',\theta\}$ 代入(8)得

$$\begin{aligned}\Delta' m\geqslant\ & 2(\Delta'+1)|M_{\Delta'}|+(\Delta'+\delta'+2)|M_{\delta'}|+\\&(\Delta'+\delta'+3)|M_\theta|+(\Delta'+1)|Q_{\Delta'}|+\\&(\Delta'+1)|Q_{\delta'}|+(\Delta'+1)|Q_\theta|+|P_\theta|+\\&(\Delta'-\delta')|P_{\delta'}|\geqslant\\&(\Delta'+\delta'+2)|M|+(\Delta'+1)|Q|\geqslant\\&\frac{1}{2}(\Delta'+\delta'+2)(2|M|+|Q|),\end{aligned}$$

即 $2|M|+|Q|\leqslant\dfrac{2\Delta' m}{2+\delta'+\Delta'}$, 从而

$$\gamma'_m(G)=m-(2|M|+|Q|)\geqslant\frac{2+\delta'-\Delta'}{2+\delta'+\Delta'}m.$$

证毕

推论 1 对具有 m 条边的 r 度边正则图 G, 有

$$\gamma'_m(G)\geqslant\frac{m}{r+1}.$$

推论 2 对于图 $G^\circ=C_n\circ K_2$, $n\geqslant3$ 有 $\gamma'_m(G^\circ)=0$, 其中图 $C_n\circ K_2$ 是在圈 C_n 的每个顶点上连接一个 K_2 所得到的图. 图 1为 $C_4\circ K_2$.

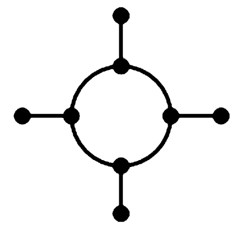

图 1 图 $C_4\circ K_2$

Fig. 1 Graph $C_4\circ K_2$

证明 由于 G° 的最大边度和最小边度分别为 4和 2, 且仅有这两种边度, 因此由定理 2可知

$$\gamma'_m(G^\circ)\geqslant0$$

$C_4\circ K_2$ 的减边控制函数如图 2所示, 下面给出定义在图 G° 上的一个减边控制函数 f 如下:

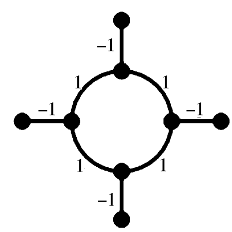

图 2 图 $C_4\circ K_2$ 的减边控制函数

Fig. 2 The minus edge domination function of graph $C_4\circ K_2$

$$f(e)=\begin{cases}+1, & e\in G^\circ,\ d'(e)=4\\-1, & e\in G^\circ,\ d'(e)=2\end{cases}$$

验证可知,

$$\sum_{e\in E(G^\circ)}f(e)=0,$$

从而 $\gamma'_m(G^\circ)\leqslant0$ 于是综上可知 $\gamma'_m(G^\circ)=0$ 证毕

参考文献:

[1] Bondy J A, Murty V S R. *Graph theory with applications*[M]. New York: Elsevier, 1976.

[2] Cockayne E J, Mynhart C M. *On a generalization of signed domination functions of graphs*[J]. Ars Combinatoria, 1996, 43: 235-245.

[3] Haynes T W, Hedetniemi S T, Slater P J. *Domination in graphs*[M]. New York: Marcel Dekker, INC, 1998.

[4] 徐保根,李春华. 图的符号星 K 控制数[J]. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25(4): 638-641.

[5] Xu B G. *On signed edge domination numbers of graphs* [J]. Discrete Math, 2001, 239(1/2/3): 179-189.

[6] Xu B G. *On signed cycle domination in graphs*[J]. Discrete Math, 2009, 309(4): 1007-1012.

[7] Xu B G. *On minus domination and signed domination in graphs*[J]. Journal of Mathematical Research & Exposition, 2003, 23(4): 585-590.

[8] 徐保根,周尚超. 关于图的减边控制[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2007, 31(1): 21-24.

责任编辑: 郭红建

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net