信阳师范学院学报:自然科学版
第 22卷 第 1期 2009年 1月

Journal of Xinyang Normal University
Natural Science Edition Vol 22 No. 1 Jan. 2009

·基础理论研究·

$SL(3, 11)$的 Cartan不变量矩阵

胡余旺*,靖 丽

(信阳师范学院 数学与信息科学学院,河南 信阳 464000)

摘 要:确定出 A_2型有限群 $G(1) = SL(3, 11)$的 Cartan不变量矩阵 $C = (c_{\lambda\mu}^{(1)})_{\lambda,\mu\in X_1(T)}$,利用 MATLAB软件计算 C的行列式的值是 11^{12},与 Brauer理论所指出的结果一致.

关键词: Cartan不变量;Weyl模;不可约模;主不可分解模

中图分类号: O152.3 **文献标志码**: A **文章编号**: 1003-0972(2009)01-001-04

The Cartan Invariant Matrix of SL(3, 11)

HU Yu-wang*, JING Li

(College of Mathematics and Information Science, Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China)

Abstract: The Cartan invariant matrix $C = (c_{\lambda\mu}^{(1)})_{\lambda,\mu\in X_1(T)}$ of the finite group $G(1) = SL(3, 11)$ of type A_2 is determined, and $\det C = 11^{12}$ is given by MATLAB soft

Key words: Cartan invariant; Weyl module; irreducible module; principal indecomposable module

0 引言和准备

设 G是特征数 $p > 0$的代数闭域 K上 A_m型单连通半单代数群, T是 G的极大环面, $X(T)$是 G关于 T的权格, $X(T)_+$是相应的支配权集. 对每个 $\lambda \in X(T)_+$, $V(\lambda)$是首权 λ的 Weyl模,它有唯一的不可约商模 $L(\lambda)$. 设 $G(n)$是 p^n个元素的有限域 $\mathbb{F}_{p^n}$上与 G同型的李型有限群. 限制支配权集 $X_n(T)$是不可约 $G(n)$-模 $L_n(\lambda)$的同构类的指标集,也是主不可分解 $G(n)$-模 $U_n(\lambda)$的同构类的指标集. $G(n)$的 Cartan不变量 $c_{\lambda\mu}^{(n)}$ $(\lambda, \mu \in X_n(T))$就是不可约 $G(n)$-模 $L_n(u)$作为射影不可分解 $G(n)$-模 $U_n(\lambda)$的合成因子出现的重数,即 $c_{\lambda\mu}^{(n)} = [U_n(\lambda) : L_n(\mu)]_{G(n)}$将 $X_n(T)$中的权按一定顺序排列后,矩阵 $C = (c_{\lambda\mu}^{(n)})_{\lambda,\mu\in X_n(T)}$是一个 $|X_n(T)|$阶对称矩阵,叫做 $G(n)$的 Cartan不变量矩阵.

设 $G_n = \mathrm{Ker}F^n$, 其中 F^n是 G的第 n次 Frobenius态射. $X_n(T)$也是不可约 G_nT-模$\hat{L}_n(\lambda)$的同构类的指标集, $\hat{L}_n(\lambda)$的射影覆盖为$\hat{Q}_n(\lambda)$. 对 $\lambda \in X_n(T)$,不可约 G-模 $L(\lambda)$作为 G_nT-模也是不可约的,并且同构于$\hat{L}_n(\lambda)$. 同时,不可约 G-模 $L(\lambda)$限制到 $G(n)$上是不可约的,并且同构于 $L_n(\lambda)$.

人们为计算 A_m型有限群的 Cartan不变量矩阵 C做了大量工作. 文献[1]计算了 $PSL(2, p)$的 C; 文献[2-4]分别计算了 $p = 2$和 p是奇素数时 $SL(3, p^n)$的 C;文献[5]计算了 $PSL(3, q)$ $(q = 2, 2^2, 2^3, 3, 3^2, 5, 7)$和 $PSU(3, q)$ $(q = 2, 2^2, 2^3, 3, 5, 7)$的 C;文献[6-7]分别计算了 $SL(3, p)$当 $p = 3, 5$和 $p = 7$的 C;文献[8]计算了 $SL(3, 2^n)$和 $SU(3, 2^n)$的 C的部分值;文献[9-10]分别计算了 $SU(3, 2^2)$和 $SU(3, 5)$的 C; 文献[11-13]各自计算了 $SL(4, 2)$, $SL(4, 2^2)$, $SL(5, 2)$的 C.

本文将计算 A_2型有限群 $G(1) = SL(3, 11)$的 C. 以下设 $n = 1$, $p = 11$. α_1, α_2是 A_2型根系的单根; ω_1, ω_2是基本支配权. 对 $\lambda = r\omega_1 + s\omega_2$, $r, s \in \mathbb{Z}$,简记为 $\lambda = (r, s)$. 于是 $\rho = (1, 1)$,支配权集 $X(T)_+ = \{(r, s) \in X(T) \mid r, s \geq 0\}$,限制支配权集 $X_1(T) = \{(r, s) \in X(T)_+ \mid r, s < 11\}$分为最高权

收稿日期: 2008-06-01;**修订日期**: 2008-09-22; *.**通讯联系人**, E-mail: huyuwang2004@yahoo.com.cn

基金项目:河南省自科学基金项目(511010200);河南省教育厅自然科学研究项目(2004922079);河南省高校青年骨干教师资助项目(教高[2005]461号)

作者简介:胡余旺(1964-),男,河南商城人,教授,博士,主要从事代数群、量子群和李代数研究.

$(10, 10)$,室内权 (2个室内各有 45个权)和墙上权(3个墙上各有 10个权),分布见图 1.

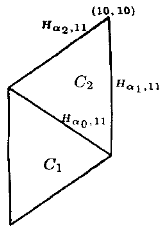


图 1 A_2型 $X_1(T)$的分布

Fig. 1 Distribution of $X_1(T)$ for type A_2

G的基本群的阶是 3,故 $d = (11 - 1, 3) = 1$. 于是 $G(1)$的所有 Cartan不变量形成 $11^2 = 121$阶对称矩阵,分成 2块:亏数为 0的 1块是 1阶矩阵,亏数为 3的 1块是 120阶对称矩阵.

1 $V(\lambda)$ $(\lambda \in X(T)_+)$ 的 G-合成因子

2个室分别为:顶室 $C_2 = \{(r, s) \in X_1(T) \mid r + s > 9, 0 < r, s < 10\}$;底室 $C_1 = \{(r, s) \in X_1(T) \mid r + s < 9, 0 \le r, s < 10\}$.

3个墙分别为:1室上闭包 $H_{\alpha_0, 11} = \{(r, s) \in X_1(T) \mid r + s = 9, r, s \ge 0\}$;2室左上闭包 $H_{\alpha_2, 11} = \{(r, 10) \in X_1(T) \mid 0 \le r < 10\}$;2室右上闭包 $H_{\alpha_1, 11} = \{(10, s) \in X_1(T) \mid 0 \le s < 10\}$.

文献[7]中的定理 3给出了 A_2型主不可分解 G_1T-模 $\hat{Q}_1(\lambda)$ $(\lambda \in X_1(T))$的以 Weyl模为商模的 G-模滤过. 支配房的壁和反射超平面 $H_{\alpha_1, 11n}$, $H_{\alpha_2, 11n}$, $H_{\alpha_0, 11n}$ $(n \ge 0)$构成全等的等边三角形,三角形的内部称为室,除支配房的壁外的边称为墙. 所有的室只有 2种类型,称为 1型室和 2型室,它们都是 C_1和 C_2的平移. 所有墙只有 3种类型,称为 1型室上闭包, 2型室左上闭包, 2型室右上闭包,它们都是 $H_{\alpha_0, 11}$, $H_{\alpha_2, 11}$, $H_{\alpha_1, 11}$的平移. 当 $\lambda \in X_1(T)$时, $\hat{Q}_1(\lambda)$的 Weyl模滤过中作为商模出现的 Weyl模的首权所在的室最多涉及到 10个,我们将这 10个室按照从低到高的顺序依次编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,则有图 2.

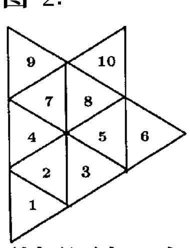


图 2 A_2型支配房内 10个室分布图

Fig. 2 10 alcoves in dominant chamber for type A_2

为方便起见,以下用正整数 k表示 k室内的权,用 $\bar{k}$表示 1型室的上闭包或 2型室的左上闭包上的权,用 $\bar{\bar{k}}$表示 2型室的右上闭包上的权, $\overset{G}{\longleftrightarrow}$(或 $\overset{G(1)}{\longleftrightarrow}$)表示两边有相同的 G(或 $G(1)$)-合成因子,则有

命题 1 $\lambda \in X_1(T)$时, $\hat{Q}_1(\lambda)$的 Weyl模滤过商如下:

$\hat{Q}_1(1) \overset{G}{\longleftrightarrow} V(1) \oplus V(2) \oplus V(5) \oplus V(6) \oplus V(7) \oplus V(8) \oplus V(9) \oplus V(10)$, $\hat{Q}_1(\bar{1}) \overset{G}{\longleftrightarrow} V(\bar{1}) \oplus V(\bar{6}) \oplus V(\bar{8}) \oplus V(\bar{9})$; $\hat{Q}_1(2) \overset{G}{\longleftrightarrow} V(2) \oplus V(3) \oplus V(4) \oplus V(5) \oplus V(7) \oplus V(8)$, $\hat{Q}_1(\bar{2}) \overset{G}{\longleftrightarrow} V(\bar{2}) \oplus V(\bar{5}) \oplus V(\bar{7})$, $\hat{Q}_1(\bar{\bar{2}}) \overset{G}{\longleftrightarrow} V(\bar{\bar{2}}) \oplus V(\bar{\bar{5}}) \oplus V(\bar{\bar{7}})$.

Jantzen在[14]中给出了 $V(\lambda)$ $(\lambda \in X(T)_+)$的 G-合成因子(即 $V(\lambda)$的 G-模滤过中作为商模出现的不可约 G-模)的分解模式,由于 $\hat{Q}_1(\lambda)$, $\lambda \in X_1(T)$的 Weyl模滤过中只涉及到 10个室,我们也只考虑这 10个室内以及相应的墙上的 Weyl模的 G-合成因子的分解式,从而有

命题 2 $V(1) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(1)$, $V(\bar{1}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{1})$;

$V(2) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(1) \oplus L(2)$, $V(\bar{2}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{2})$, $V(\bar{\bar{2}}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{\bar{2}})$;

$V(3) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(2) \oplus L(3)$, $V(\bar{3}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{3}) \oplus L(\bar{2})$;

$V(4) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(2) \oplus L(4)$, $V(\bar{4}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{4}) \oplus L(\bar{\bar{2}})$;

$V(5) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(1) \oplus L(2) \oplus L(3) \oplus L(4) \oplus L(5)$, $V(\bar{5}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{\bar{2}}) \oplus L(\bar{4}) \oplus L(\bar{5})$, $V(\bar{\bar{5}}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{1}) \oplus L(\bar{\bar{5}})$;

$V(6) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(1) \oplus L(5) \oplus L(6)$, $V(\bar{6}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{5}) \oplus L(\bar{6})$;

$V(7) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(1) \oplus L(2) \oplus L(3) \oplus L(4) \oplus L(7)$, $V(\bar{7}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{1}) \oplus L(\bar{7})$, $V(\bar{\bar{7}}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{2}) \oplus L(\bar{3}) \oplus L(\bar{\bar{7}})$;

$V(8) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(1) \oplus L(2) \oplus L(3) \oplus L(4) \oplus L(5) \oplus L(7) \oplus L(8)$, $V(\bar{8}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{1}) \oplus L(\bar{\bar{5}}) \oplus L(\bar{7}) \oplus L(\bar{8})$;

$V(9) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(1) \oplus L(7) \oplus L(9)$, $V(\bar{9}) \overset{G}{\longleftrightarrow} V(\bar{9}) \oplus L(\bar{\bar{7}})$;

$V(10) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(1) \oplus L(3) \oplus L(4) \oplus L(5) \oplus L(6) \oplus L(7) \oplus L(8) \oplus L(9) \oplus L(10)$,
$V(\overline{10}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{3}) \oplus L(\bar{\bar{7}}) \oplus L(\bar{9}) \oplus L(\overline{10})$,
$L(\overline{\overline{10}}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{5}) \oplus L(\bar{6}) \oplus L(\overline{\overline{10}})$.

2 $\hat{Q}_1(\lambda)$ $(\lambda \in X_1(T))$的 $G(1)$-合成因子

由命题 1和命题 2,我们可得到 $\lambda \in X_1(T)$时 $\hat{Q}_1(\lambda)$的 G-合成因子分解模式,即有

命题 3 $\lambda \in X_1(T)$时 $\hat{Q}_1(\lambda)$的 G-合成因子

分解模式为

$\hat{Q}_1(1) \overset{G}{\longleftrightarrow} 8L(1) \oplus 4L(2) \oplus 4L(3) \oplus 4L(4) \oplus 4L(5) \oplus 2L(6) \oplus 4L(7) \oplus 2L(8) \oplus 2L(9) \oplus L(10)$;

$\hat{Q}_1(2) \overset{G}{\longleftrightarrow} 4L(1) \oplus 6L(2) \oplus 4L(3) \oplus 4L(4) \oplus 2L(5) \oplus 2L(7) \oplus L(8)$;

$\hat{Q}_1(\bar{1}) \overset{G}{\longleftrightarrow} 2L(\bar{1}) \oplus L(\bar{5}) \oplus L(\bar{\bar{5}}) \oplus L(\bar{6}) \oplus L(\bar{7}) \oplus L(\bar{\bar{7}}) \oplus L(\bar{8}) \oplus L(\bar{9})$;

$\hat{Q}_1(\bar{2}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{1}) \oplus L(\bar{2}) \oplus L(\bar{\bar{2}}) \oplus L(\bar{4}) \oplus L(\bar{5}) \oplus L(\bar{7})$;

$\hat{Q}_1(\bar{\bar{2}}) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\bar{\bar{1}}) \oplus L(\bar{2}) \oplus L(\bar{\bar{2}}) \oplus L(\bar{3}) \oplus L(\bar{\bar{5}}) \oplus L(\bar{\bar{7}})$.

由 Steinberg张量积定理,我们得到

命题 4 对 $\lambda \in X_1(T)$, $\hat{Q}_1(\lambda)$ 的 G-合成因子都形如 $L(\lambda_0) \otimes L(v)^{[1]}$, $\lambda_0 \in X_1(T)$, 其中 $v \in \{(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1,), (3,0), (0,2)\} = \mathbf{X}$.

设 $\lambda, \mu \in \mathbf{X}$, 文献[15]给出了 A_2 型部分 $m_\lambda(\mu)$ 的值. 于是,对 $\lambda \in X_1(T)$, $\lambda' \in \mathbf{X}$, 由[7]中的引理 4以及上面的命题 2可以得出 $V(\lambda) \otimes V(\lambda')$ 的 G-合成因子分解. 由于当 $\lambda \in X_1(T) - C_2$ 时, $V(\lambda) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\lambda)$, 而对 $\lambda' \in \mathbf{X}$, 有 $V(\lambda') \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\lambda')$, 从而有 $L(\lambda) \otimes L(\lambda') \overset{G}{\longleftrightarrow} V(\lambda) \otimes V(\lambda')$, 得到 $L(\lambda) \otimes L(\lambda')$ 的 G-合成因子. 当 $\lambda \in C_2$ 时, $V(\lambda) \overset{G}{\longleftrightarrow} L(\lambda) \oplus L(\lambda_0)$, 其中 λ_0 是 1室内与 λ 连结的权. 于是 $L(\lambda) \otimes L(\lambda') \overset{G}{\longleftrightarrow} V(\lambda) \otimes V(\lambda') - L(\lambda_0) \otimes L(\lambda') = V(\lambda) \otimes V(\lambda') - V(\lambda_0) \otimes V(\lambda')$, 也得到 $L(\lambda) \otimes L(\lambda')$ 的 G-合成因子.

设 $L(\lambda_0) \otimes L(v)^{[1]}$ ($\lambda_0 \in X_1(T)$, $v \in \mathbf{X}$) 是 $\hat{Q}_1(\lambda)$ ($\lambda \in X_1(T)$) 的任一个 G-合成因子,作为 $G(1)$-模有 $L(\lambda_0) \otimes L(v)^{[1]} \overset{G(1)}{\cong} L(\lambda_0) \otimes L(v)$. 设 $L(\mu)$ 是 $L(\lambda_0) \otimes L(v)$ 的一个 G-合成因子,如果 $\mu \in X_1(T)$, 那么有 $L(\mu) = L_1(\mu)$. 如果 $\mu \quad X_1(T)$, 那么 $\mu = \mu_0 + 11\mu_1$, 其中 $\mu_0 \in X_1(T)$, $\mu_1 \in \mathbf{X}$, 从而 $L(\mu) = L(\mu_0) \otimes L(\mu_1)^{[1]} \overset{G(1)}{\cong} L(\mu_0) \otimes L(\mu_1)$, 重复前面的过程有限次,可以得到 $L(\lambda_0) \otimes L(v)$ 的全部 $G(1)$-合成因子,最终得到 $\lambda \in X_1(T)$ 时 $\hat{Q}_1(\lambda)$ 的全部 $G(1)$-合成因子 $L_1(\mu)$, $\mu \in X_1(T)$.

3 $\hat{Q}_1(\lambda)$ ($\lambda \in X_1(T)$) 的 $U_1(\mu)$-分解

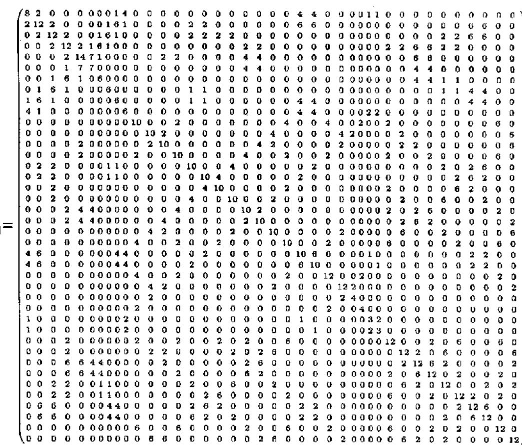
当 $\lambda \in X_1(T)$ 时, G_1T-模 $\hat{Q}_1(\lambda)$ 限制到 $G(1)$ 上是射影 $G(1)$-模, 从而可分解为主不可分解 $G(1)$-模 $U_1(\mu)$ 的直和, Chastkofsky在文献[16]中给出了分解公式 $[\hat{Q}_1(\lambda) : U_1(\mu)]_{G(1)} = \sum_{v \in X(T)_+} [L(\mu) \otimes L(v) : L(11v + \lambda)]_G$. 经过具体复杂的计算,我们得到

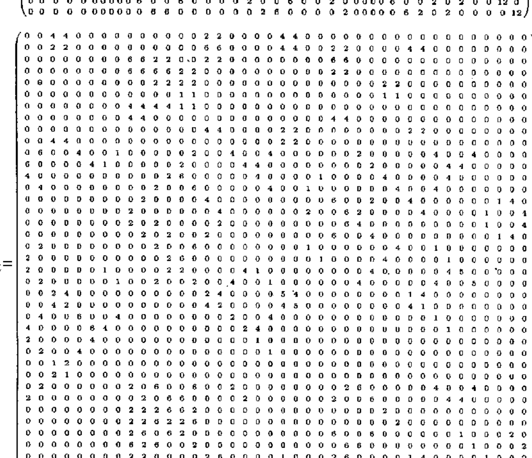
命题 5 $\lambda \in X_1(T)$ 时 $\hat{Q}_1(\lambda)$ 的 $U_1(\mu)$ 分解式如下:

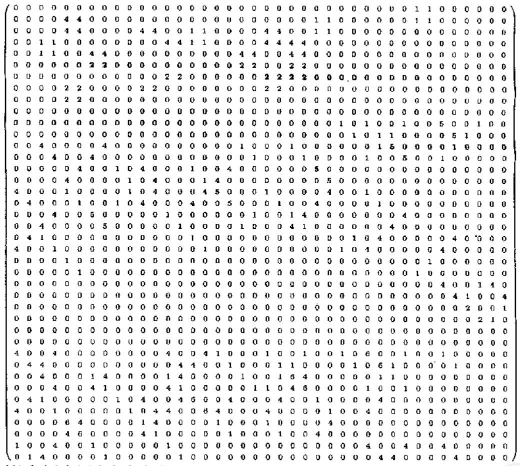
$\hat{Q}_1(0,0) \overset{G(1)}{\longleftrightarrow} U_1(0,0) \oplus U_1(10,0) \oplus U_1(0,10) \oplus U_1(10,10)$; $\hat{Q}_1(r,s) \overset{G(1)}{\longleftrightarrow} U_1(r,s)$ $(0 < r, s \le 10, rs \ne 0)$; $\hat{Q}_1(r,0) \overset{G(1)}{\longleftrightarrow} U_1(r,10) \oplus U_1(r,0)$ $(0 < r \le 10)$; $\hat{Q}_1(0,s) \overset{G(1)}{\longleftrightarrow} U_1(10,s) \oplus U_1(0,s)$ $(0 < s \le 10)$.

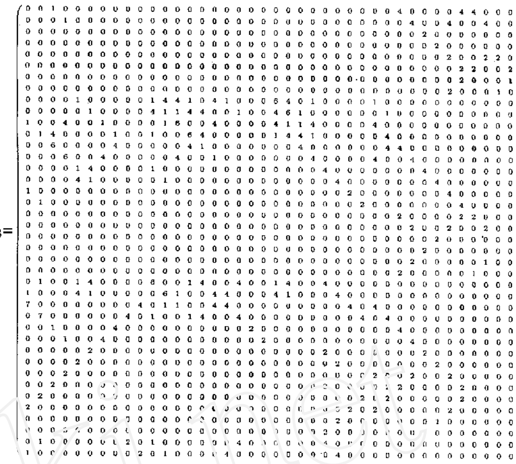
4 结果

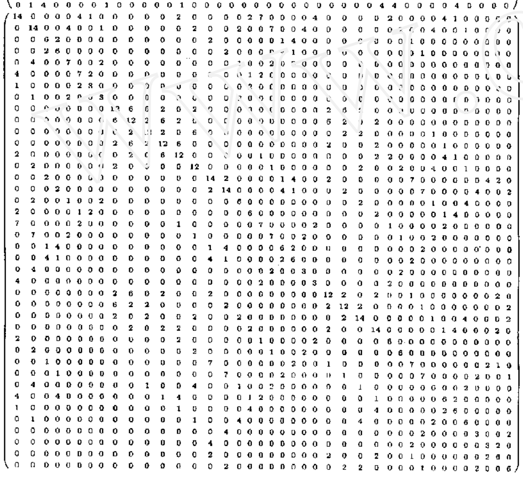
将 $X_1(T)$ 中的 121个权按如下规则进行排序: (i,i) $(0 \le i \le 9)$; (i,j), (j,i) $(0 \le i \le 9, i+1 \le j \le 10)$; $(10,10)$, 则有 $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 $A = (A_{ij})_{3\times3}$ 是分块对称矩阵, A_{ij} $(1 \le i \le j \le 3)$ 见后. 利用 MATLAB数学软件计算得到 $\det C = \det A = 11^{12}$, 正如 Brauer所指出的.

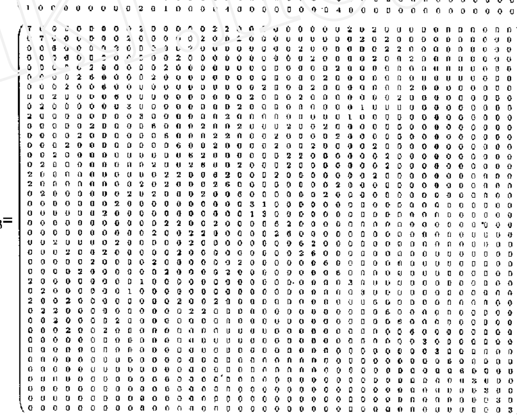
$A_{11}=$ 

$A_{12}=$ 

$A_{13}=$


$A_{23}=$


$A_{22}=$


$A_{33}=$


参考文献:

[1] Brauer R, Nesbitt C. *On the modular characters of groups*[J]. Ann of Math (S0003-486X), 1941, 42: 556-590.

[2] Alperin J L. *On modules for the linear fractional groups*[C] // International Symposium on Theory of Finite Groups. Kyoto: RIMS, 1975: 157-163.

[3] Alperin J L. *Projective modules for $SL(2, 2^n)$* [J]. Pure Appl Algebra (S0022-4049), 1979, 15: 219-234.

[4] Upadhyaya B S. *Composition factors of the principal indecomposable modules for the special linear groups $SL(2, q)$* [J]. J London Math Soc (S0024-6107), 1978, 17(2): 437-445.

[5] Zaslawsky E. *Computational methods applied to ordinary and modular characters of some finite simple groups*[D]. Santa cruz: Univ California, 1974.

[6] Humphreys J E. *Some computation of Cartan invariants for finite groups of Lie type*[J]. Comm Pure Appl Math (S0010-3640), 1973, 26: 745-755.

[7] 叶家琛. $SL(3, p^n)$的 Cartan不变量[J]. 数学研究与评论, 1982, 2(4): 9-19.

[8] Andikfar H. *Decomposition numbers of special and unitary groups in the defining characteristic*[D]. Chicago: Univ Hlinois, 2005.

[9] Benson D J, Martin S. *Mod 2 cohomology of the unitary groups $U_3(2^n)$* [J]. Comm Algebra (S0092-7872), 1991, 19: 3125-3144.

[10] Humphreys J E. *Ordinary and modular representations of chevalley groups*[C] //Lecture Notes in Math (528). Berlin: Springer, 1976.

[11] Benson D J. *The Loewy structure of the projective indecomposable modules for A_8 in characteristics* 2[J]. Comm Algebra (S0092-7872), 1983, 11: 1395-1432.

[12] 杜　杰. $SL(4, 2^n)$的 Cartan不变量[J]. 华东师范大学学报:自然科学版, 1986(4): 17-25.

[13] Ye J C. *The Cartan invariant matrix for the finite group $SL(5, 2)$* [J]. Algebra Colloq (S1005-3867), 1997, 4(2): 203-211.

[14] Jantzen J C. *Uber das Dekompositionsverhalten gewisser modularer Darstellungen halbeinfacher Gruppen*[J]. J Algebar (S0021-8693), 1977, 49: 441-469.

[15] 胡余旺, 戴启学. 秩 2情形 $m_\lambda(\mu)$的确定[J]. 信阳师范学院学报:自然科学版, 1996, 9(4): 339-343.

[16] Chastkofsky L. *Projective characters for finite Chevalley groups*[J]. J Algebra (S0021-8693), 1981, 69: 347-357.

责任编辑:郭红建