信阳师范学院学报(自然科学版)
第 17 卷 第 2 期 2004 年 4 月

Journal of Xinyang Normal University
(Natural Science Edition) Vol. 17 No. 2 Apr. 2004

·基础理论研究·

细菌模型的有限元方法及数值分析

任宗修[1], 任卫银[2]

(1. 河南师范大学 数学系, 河南 新乡 453002; 2. 平原大学, 河南 新乡 453002)

摘 要: 对一个描述细菌传染的反应——扩散方程组的初、边值问题构造了半离散和全离散有限元格式, 并进行了数值分析, 得到了相应误差估计.

关键词: 反应扩散方程组; 有限元; 误差估计

中图分类号: O241.82 **文献标识码**: A **文章编号**: 1003-0972(2004)02-0159-03

0 引言

细菌在空间传播直接影响着人民群众的身体健康和生命安全, 掌握细菌的传播规律, 可以有效制止细菌的传播, 对人民的身体健康提供有力的保障. 因此, 研究细菌模型问题一直受到人们的关注, 文献[1]研究了细菌传染的反应——扩散方程组解的存在惟一性, 本文讨论求解这类方程组的有限元方法.

我们考虑如下的细菌在空间传播问题:

$$u_t = d_1\Delta u - a_{11}u + a_{12}v,\ (x,t)\in\Omega\times J \tag{1}$$

$$v_t = d_2\Delta v - a_{22}v + g(u),\ (x,t)\in\Omega\times J \tag{2}$$

$$u = v = 0,\ (x,t)\in\partial\Omega\times J \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ x\in\Omega \tag{4}$$

其中, $\Omega\subset R^d\ (d\leq 3)$ 是具有光滑边界的有界区域; $J = (0, T]$, $T > 0$; a_{11}、a_{12}、a_{22} 皆为正常数; u 表示细菌的空间密度; v 表示被传染的人口密度; d_1、$d_2 > 0$ 为扩散系数; $a_{11}u$ 表示细菌的自然死亡率; $a_{12}v$ 表示传染病人口对细菌增加的贡献; $a_{22}v$ 表示染病人口潜伏期所产生的阻尼项; $g(u)$ 表示在传染病流行中, 当易受传染人口总数不变情况下的人口传染率, 且满足 Lipchitz 条件.

设 $\|\cdot\|_{s,p}$ 表示通常意义下 s 阶 Sobolev 空间 $W^{s,p}(\Omega)$ 的范数, $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$, $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{s,2}$、$L^\infty_{(0,T;H^s(\Omega))}$ 中元素的范数定义为 $\|\cdot\|_{L^\infty(0,T;H^s(\Omega))} = \sup\limits_{0\leq t\leq T}\|\cdot\|_s$.

将 Ω 作正规三面体剖分得 Ω_h, 记 e 为 Ω_h 中的单元, h 为所有单元中最大的直径, 对 $r\geq 1$, 令 $S_h = \{\varphi\in H_0^1(\Omega); \varphi|_e$ 为 r 次多项式, $\forall e\in\Omega_h\}$.

文中 C 为正的常数, 在不同的地方代表不同的值.

1 半离散有限元格式

问题(1)~(4)的半离散有限元格式为: 求 $(U(t), V(t))\in S_h\times S_h$, 使得:

$$(U_t,\varphi) + d_1(\nabla U,\nabla\varphi) = a_{12}(V,\varphi) - a_{11}(U,\varphi), \tag{5}$$

$$(V_t,\varphi) + d_2(\nabla V,\nabla\varphi) = (g(U),\varphi) - a_{22}(V,\varphi),\quad \forall\varphi\in S_n \tag{6}$$

为进行误差分析, 引入辅助问题: 求 $\tilde{u}$、$\tilde{v}\in S_h$, 使满足: $(\nabla(u-\tilde{u}),\nabla\varphi) = 0$, $(\nabla(v-\tilde{v}),\nabla\varphi) = 0$, $\forall\varphi\in S_h$.

设 $\eta = u-\tilde{u}$, $\xi = U-\tilde{u}$, $\rho = v-\tilde{v}$, $\theta = V-\tilde{v}$, 则由椭园型方程的有限元理论知, 对 $s = \eta, \rho$,

$$\begin{aligned}&\|s\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|s_t\|_{L^2(0,T;L^2)} + \\ &\quad h\{\|s\|_{L^2(0,T;H^1)} + \|s_t\|_{L^2(0,T;H^1)}\}\leq \\ &\quad Ch^{r+1}\{\|\lambda\|_{L^2(0,T;H^{r+1})} + \\ &\quad \|\lambda_t\|_{L^2(0,T;H^{r+1})}\},\ \lambda = u, v\end{aligned} \tag{7}$$

由(1)和(5)及(2)和(6)易得

$$\begin{aligned}&(\xi_t,\varphi) + d_1(\nabla\xi,\nabla\varphi) = \\ &\quad a_{12}(\theta+\rho,\varphi) - a_{11}(\eta+\xi,\varphi) - (\eta_t,\varphi),\ \forall\varphi\in S_h\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&(\theta_t,\varphi) + d_2(\nabla\theta,\nabla\varphi) = \\ &\quad (g(u) - g(U),\varphi) - a_{22}(\rho+\theta,\varphi) - (\rho_t,\varphi),\ \forall\varphi\in S_h\end{aligned} \tag{9}$$

收稿日期: 2003-06-23

作者简介: 任宗修(1957-), 男, 河南孟津人, 硕士, 副教授, 主要研究方向: 偏微分方程数值解.

在(8)中, 取 $\varphi=\xi$, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\xi\|^2+d_1\|\nabla\xi\|^2\le C(\|\eta\|^2+\|\xi\|^2+\|\rho\|^2+\|\theta\|^2+\|\eta_t\|^2) \quad (10)$$

在(9)中, 取 $\varphi=\theta$, 利用 $g(u)$ 满足 Lip 条件, 我们不难得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2+d_2\|\nabla\theta\|^2\le C(\|\eta\|^2+\|\xi\|^2+\|\rho\|^2+\|\theta\|^2+\|\rho_t\|^2) \quad (11)$$

由(7)、(10)、(11)可得

$$\frac{d}{dt}(\|\xi\|^2+\|\theta\|^2)+d(\|\nabla\xi\|^2+\|\nabla\theta\|^2)\le C(h^{2r+2}+\|\xi\|^2+\|\theta\|^2).$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|\xi\|^2+\|\theta\|^2\le\|\xi(0)\|^2+\|\theta(0)\|^2+Ch^{2r+2} \quad (12)$$

选取初值 $U(0)$、$V(0)$ 满足

$$(\nabla(U(0)-u_0(x)),\nabla\varphi)=0,$$
$$(\nabla(V(0)-v_0(x)),\nabla\varphi)=0,$$

则 $\xi(0)=\theta(0)=0$. 由三角不等式和(7)、(12)得:

定理 1　设 u、v 是(1)～(4)的解, 满足 u、v、u_t、$v_t\in L^\infty(0,T;H^{r+1})$, U、V 是(5)～(6)的解, 则存在与 t 和 h 均无关的常数 C, 使得

$$\|u(x,t)-U(x,t)\|+\|v(x,t)-V(x,t)\|\le Ch^{r+1}.$$

2　全离散有限元格式

将区间 $[0,T]$ 分成 M 等分, $0=t_0<t_1<\cdots<t_M=T$, 记 $t_n=n\Delta t$, $\Delta t=t_n-t_{n-1}$, $u^n=u(x,t_n)$, $\partial u^n=\frac{1}{2\Delta t}(u^{n+1}-u^{n-1})$, $\bar{u}^n=(u^{n+1}+u^{n-1})/2$.

对问题(1)～(4)构造如下的全离散有限元格式: 求 $(U^n,V^n)\in S_h\times S_h$, 使得

$$(\partial U^n,\varphi)+d_1(\nabla\bar{U}^n,\nabla\varphi)=a_{12}(\bar{V}^n,\varphi)-a_{11}(\bar{U}^n,\varphi), \quad (13)$$

$$(\partial V^n,\varphi)+d_2(\nabla\bar{V}^n,\nabla\varphi)=(g(\bar{U}^n),\varphi)-a_{22}(\bar{V}^n,\varphi),\ \forall\varphi\in S_h, \quad (14)$$

在 $t=t_n$ 处, (1)和(2)可写成:

$$(\partial u^n,\varphi)+d_1(\nabla\bar{u}^n,\nabla\varphi)=a_{12}(v^n,\varphi)-a_{11}(u^n,\varphi)+(\partial u^n-\frac{\partial u^n}{\partial t},\varphi)+d_1(\nabla\bar{u}^n-\nabla u^n,\nabla\varphi), \quad (15)$$

$$(\partial v^n,\varphi)+d_2(\nabla\bar{v}^n,\nabla\varphi)=(g(u^n),\varphi)-a_{22}(v^n,\varphi)+(\partial v^n-v_t^n,\varphi)+d_2(\nabla\bar{v}^n-\nabla v^n,\nabla\varphi), \quad (16)$$

(13)与(15)、(14)与(16)分别相减可得:

$$(\partial\xi^n,\varphi)+d_1(\nabla\bar{\xi}^n,\nabla\varphi)=a_{12}(\rho^n+\theta^n,\varphi)+a_{12}(v^n-\bar{v}^n,\varphi)-a_{11}(\eta^n+\xi^n,\varphi)-(\partial\eta^n,\varphi)-a_{11}(u^n-\bar{u}^n,\varphi)+d_1(\nabla\bar{u}^n-\nabla u^n,\nabla\varphi)+(\partial u^n-u_t^n,\varphi), \quad (17)$$

$$(\partial\theta^n,\varphi)+d_2(\nabla\bar{\theta}^n,\nabla\varphi)=(g(u^n)-g(\bar{U}^n),\varphi)-a_{22}(\rho^n+\theta^n,\varphi)+(\partial v^n-v_t^n,\varphi)-a_{22}(v^n-\bar{v}^n,\varphi)-(\partial\rho^n,\varphi)+d_2(\nabla\bar{v}^n-\nabla v^n,\nabla\varphi) \quad (18)$$

在(17)中, 取 $\varphi=\bar{\xi}^n$, 由于

$$(\partial\xi^n,\bar{\xi}^n)=\frac{1}{4\Delta t}(\|\xi^{n+1}\|^2-\|\xi^{n-1}\|^2),$$
$$d_1(\nabla\bar{\xi}^n,\nabla\bar{\xi}^n)=d_1\|\nabla\bar{\xi}^n\|^2,$$
$$a_{12}(\rho^n+\theta^n,\bar{\xi}^n)\le C(\|\rho^n\|^2+\|\theta\|^2+\|\xi^{n+1}\|^2+\|\xi^{n-1}\|^2),$$
$$a_{12}(v^n-\bar{v}^n,\bar{\xi}^n)\le a_{12}/2(\|v^n-\bar{v}^n\|^2+\|\bar{\xi}^n\|^2)\le C(\Delta t^4+\|\xi^{n+1}\|^2+\|\xi^{n-1}\|^2),$$
$$a_{11}(\eta^n+\xi^n,\bar{\xi}^n)\le C(\|\eta^n\|^2+\|\xi^n\|^2+\|\xi^{n+1}\|^2+\|\xi^{n-1}\|^2),$$
$$(\partial\eta^n,\bar{\xi}^n)\le C(\|\eta_t\|^2+\|\xi^{n+1}\|^2+\|\xi^{n-1}\|^2),$$
$$a_{11}(u^n-\bar{u}^n,\bar{\xi}^n)\le C(\Delta t^4+\|\xi^{n+1}\|^2+\|\xi^{n-1}\|^2),$$
$$(\partial u^n-u_t^n,\bar{\xi}^n)\le C(\Delta t^4+\|\xi^{n+1}\|^2+\|\xi^{n-1}\|^2).$$

利用 ϵ-不等式: $ab\le\epsilon a^2+\frac{1}{4\epsilon}b^2$ 可得:

$$d_1(\Delta\bar{u}^n-\nabla u^n,\nabla\bar{\xi}^n)\le\epsilon d_1\|\nabla\bar{\xi}^n\|^2+\frac{d_1}{4\epsilon}\|\nabla\bar{u}^n-\nabla u^n\|^2\le\epsilon d_1\|\nabla\bar{\xi}^n\|^2+C\Delta t^4,$$

将上述估计结果代入(17), 由(7)可得:

$$\frac{1}{4\Delta t}(\|\xi^{n+1}\|^2-\|\xi^{n-1}\|^2)+(1-\epsilon)d_1\|\nabla\bar{\xi}^n\|^2\le C(\Delta t^4+h^{2r+2}+\|\xi^n\|^2+\|\theta^n\|^2+\|\xi^{n+1}\|^2+\|\xi^{n-1}\|^2).$$

取 $\epsilon=\frac{1}{2}$, 上式两端同乘 $4\Delta t$, 关于 n 从 1 到 $M-1$

求和, 得:

$$\|\xi^M\|^2+\|\xi^{M-1}\|^2-\|\xi^1\|^2-\|\xi^0\|^2+2d_1\Delta t\sum_{n=1}^{M-1}\|\nabla\bar{\xi}^n\|^2\le C\Delta t\sum_{n=0}^{M}(\Delta t^4+h^{2r+2}+\|\xi^n\|^2+\|\theta^n\|^2),\quad(19)$$

在(18)中, 取 $\varphi=\bar{\theta}^n$, 由 $g(u)$ 是满足 Lip 条件, 我们可有:

$$(g(u^n)-g(\bar{U}^n),\bar{\theta}^n)\le\frac{1}{2}(\|g(u^n)-g(\bar{U}^n)\|^2+\|\bar{\theta}^n\|^2)\le\frac{1}{2}(L^2(\|u^n-\bar{u}^n\|^2+\|\bar{u}^n-\bar{U}^n\|^2)+\|\bar{\theta}^n\|^2)\le C(\Delta t^4+\|\eta^{n+1}\|^2+\|\eta^{n-1}\|^2+\|\xi^{n+1}\|^2+\|\xi^{n-1}\|^2+\|\theta^{n+1}\|^2+\|\theta^{n-1}\|^2).$$

(18)中其他各项, 完全类似推导(19)的分析估计, 我们类似可得:

$$\|\theta^M\|^2+\|\theta^{M-1}\|^2-\|\theta^1\|^2-\|\theta^0\|^2+2\Delta td_2\sum_{n=1}^{M-1}\|\nabla\bar{\theta}^n\|^2\le C\Delta t\sum_{n=0}^{M}(\Delta t^4+h^{2r+2}+\|\xi^n\|^2+\|\theta^n\|^2)\quad(20)$$

由(19)和(20)可得

$$\|\xi^M\|^2+\|\theta^M\|^2\le\|\theta^0\|^2+\|\theta^1\|^2+\|\xi^0\|^2+\|\xi^1\|^2+C\Delta t\sum_{n=0}^{M}(\Delta t^4+h^{2r+2}+\|\xi^n\|^2+\|\theta^n\|^2),\quad(21)$$

选取 Δt 使 $C\Delta t<1$, 由 Gronwall 不等式得:

$$\|\xi^M\|^2+\|\theta^M\|^2\le C(\|\theta^0\|^2+\|\theta^1\|^2+\|\xi^0\|^2+\|\xi^1\|^2+\Delta t^4+h^{2r+2},\quad(22)$$

适当选取初值, 使

$$\|\theta^0\|^2+\|\theta^1\|^2+\|\xi^0\|^2+\|\xi^1\|^2\le C(\Delta t^4+h^{2r+2}),$$

由三角不等式和(7)、(22)可得收敛性定理:

定理 2 设 u、v 是(1)～(4)的解, u、v、u_t, $v_t\in L^\infty_{(0,T;H^{r+1})}$, u_{tt}, $v_{tt}\in L^\infty_{(0,T;H^1)}$, U^n、V^n 是(13)～(14)的解, 则存在与 Δt、h 均无关的常数 C, 使得:

$$\|u(x,n\Delta t)-U^n(x)\|+\|v(x,n\Delta t)-V^n(x)\|\le C(\Delta t^2+h^{r+1}),\ \forall n\Delta t\le T.$$

参考文献:

[1] 陈仲慈. 推广的细菌模型的周期边界问题[J]. 高校应用数学学报, 1987, 2(4): 559-566.

[2] CIARLET P G. *FEM for elliptic problem* [M]. Amsterdan: North-Holland, 1978.

[3] 朱 江. 非线性 RLW 方程的特征数值方法[J]. 应用数学学报, 1990, 13(1): 64-73.

[4] 张争茹. 带有迁移的疟疾病与疟蚊数学模型的交替方向有限元法及其数值分析[J]. 生物数学学报, 2003, 18(1): 67-76.

Finite element method for bacterial model and its numerical analysis

REN Zong-xiu[1], REN Wei-yin[2]

(1. Department of Mathematics, Henan Normal University, Xinxiang 453002, China;

2. Pingyuan University, Xinxiang 453002, China)

Abstract: Finite element method is considered for a system of reaction-diffusion equations of bacterial infection with initial and boundary conditions, the semidiscrete and fully discrete finite element schemes are constructed and the numerical analysis is done. The relative error estimates are obtained.

Key words: system of reaction-diffusion equations; finite element; error estimates

责任编校: 郭红建