·基础理论研究·

一类变换半群的秩

裴惠生

(信阳师范学院 数学与信息科学学院, 河南 信阳 464000)

摘 要: 设 T_X 为集合 X 上的全变换半群, E 是 X 上一个等价关系. 令

$$T_E(X)=\{f\in T_X:\forall(x,y)\in E,(f(x),f(y))\in E\},$$

则 $T_E(X)$ 是 T_X 的一个子半群. 本文讨论对于一个较为特殊的情况, 即 E 只有两个等价类, 且每个等价类有 n $(n\geq 3)$ 个点. 结果发现, 这时 $T_E(X)$ 有一组生成元, 含有5个元素, 从而确定了 $T_E(X)$ 的秩不超过5.

关键词: 变换半群; 等价关系; 生成集; 置换

中图分类号: O152.7 **文献标识码**: A **文章编号**: 1003-0972(2004)01-0001-03

0 引言

设 S 是一个半群, T 是 S 的一个子集. 如果 S 中每个元素都可以表示成 T 中元素的乘积, 则称 T 为 S 的一个生成集, 记为 $S=\langle T\rangle$. 称 S 的生成集基数的最小值, 即 $\min\{|T|:\langle T\rangle=S\}$ 为 S 的秩. 关于变换半群的生成集和秩的讨论一直是变换半群研究的一个重要课题. 近几十年来, 有不少学者致力于该课题的研究. 例如, 当 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ $(n\geq 3)$ 时, 对称群 G_X 的基数被确定为2. 特别地, 这个群由两个元素

$$\tau=(12) \text{ 和 } \zeta=(12\cdots n)$$

生成(见文献[5]). 在此基础上, X 上全变换半群的秩可以确定为3, 它的一组生成元是 G_X 的两个生成元再添加任意一个亏值为1的变换. 这里 X 上一个变换 β 的亏值是指其象集的余集的基数 $|X-\operatorname{im}\beta|$. Howie[2,3] 考察了 X 上全变换半群 T_X 的由幂等元生成的子半群以及这个子半群由亏值为1的幂等元组成的最小生成集的基数. Gomes 和 Howie[4] 讨论了逆半群 SP_n 的幂等元秩和幂零元秩. 这里, SP_n 指集合 X 上全体真子置换所构成的逆半群. Magill[6] 讨论了拓扑空间 X 上的连续变换半群的由幂等元生成的子半群.

作者在文献[7]中讨论了一类变换半群如下: 设 X 为非空集合, E 是 X 上一个等价关系, 设 $T_E(X)=\{f\in T_X:\forall(x,y)\in E,(f(x),f(y))\in E\}$, 则 $T_E(X)$ 是 T_X 的一个子半群. 并且如果把所有的 E 等价类作为拓扑基, 使 X 带上拓扑, 那么 $T_E(X)$ 恰是拓扑空间上的连续变换半群 $S(X)$. 关于这类半群, 一些有趣的性质被揭示, 请参看文献[8, 9, 10].

本文打算在一种较特殊的条件之下, 讨论半群 $T_E(X)$ 的秩. 即假定 X 有 $2n$ $(n\geq 3)$ 个点, 等价关系 E 恰有两个等价类, 且每个类都是 n 个点的情形. 第1节中考虑 $T_E(X)$ 中所有的双射所构成的子群 G 的秩, 我们找到了 G 的一组生成元, 只含有3个元素. 由此推断 G 的秩不超过3. 在第2节中, 利用第1节中的结果, 我们找到 $T_E(X)$ 的一组生成元, 只含有5个元素, 从而推断 $T_E(X)$ 的秩不超过5.

关于半群理论的标准的术语和概念, 可参看文献[1].

1 同胚群的生成元

本文中总假设 $X=\{1,2,\cdots,2n\}$ $(n\geq 3)$, X 上的等价关系 $E=(A\times A)\cup(B\times B)$, 这里

$$A=\{1,2,\cdots,n\}, B=\{n+1,n+2,\cdots,2n\}.$$

这里, 用 $\tau=(12)$, $\zeta=(12\cdots n)$ 表示 X 上的置换, 它们分别将没有写出的数字变为自身. 令 τ_* 表示下边的置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

收稿日期: 2003-08-12
作者简介: 裴惠生(1948-), 男, 河南潢川人, 教授, 主要从事半群代数理论方面的研究.

有时也将 τ_* 简写为 $(A\ B)$. 记 $\tau' = (n+1\ n+2)$, $\zeta' = (n+1\ n+2\ \cdots\ 2n)$ 为 X 上的两个循环置换, 这里每个置换中没有写出的数字是保持不变的 首先, 容易验证下面的结果, 证明略

引理 1　$\tau_*\tau\tau_* = \tau'$, $\tau_*\zeta\tau_* = \zeta'$, $\tau_*\tau'\tau_* = \tau$, $\tau_*\zeta'\tau_* = \zeta$

称 $f \in T_E(X)$ 为 E-不变的, 如果 f 将每个 E 类还映到这个类 明显地, 如果 f 是 E-不变的, 那么 $f|A$ 是 A 上的一个变换, $f|B$ 是 B 上的一个变换 同时, $T_E(X)$ 中还有一部分变换不是 E-不变的, 它们将每个 E 类映到另一个类

如前所言, 当 X 带上以 $\{A, B\}$ 为基的拓扑时, $T_E(X)$ 恰好就是空间 X 的连续变换半群 $S(X)$. 不难看出, $f \in T_E(X)$ 是 X 上一个双射当且仅当 f 是拓扑空间 X 上的一个同胚 所以, 称 $T_E(X)$ 中所有的双射所成的群为同胚群, 记为 G. 本节中我们来探讨这个群的秩

引理 2　如果 $f \in G$ 是 E-不变的, 则 f 可以表示为 τ, ζ 和 τ_* 的乘积

证明　令 $f_1 = (f|A) \cup 1_B$, $f_2 = (f|B) \cup 1_A$, 由于 $f|A \in G_A$, $f|B \in G_B$, 所以 f_1 可以表示为 τ 与 ζ 的乘积, f_2 可以表示为 τ' 和 ζ' 的乘积 根据引理 1, f_2 可以表示成 τ, ζ 和 τ_* 的乘积 注意到 $f = f_1 f_2$, 于是 f 也可表示为 τ, ζ, τ_* 的乘积　　证毕

定理 1　任意 $f \in G$ 都可以表示为 τ, ζ, τ_* 的乘积 于是 $G = \langle \tau, \zeta, \tau_* \rangle$, 同胚群 G 的秩 ≤ 3.

证明　如果 f 是 E-不变的, 由引理 2 知结论成立 如果 f 不是 E-不变的, 那么有 $Af = B$, $Bf = A$, 于是 $Af\tau_* = A$, $Bf\tau_* = B$, 所以 $f\tau_*$ 是 E-不变的 仍然由引理 2, 知 $f\tau_*$ 可表示为 τ, ζ, τ_* 的乘积 设 $f\tau_* = p(\tau, \zeta, \tau_*)$. 注意到 $\tau_*^2 = (1)$, 故

$$f = p(\tau, \zeta, \tau_*)\tau_*,$$

表明 f 可以表示为 τ, ζ, τ_* 的乘积　　证毕

2　关于 $T_E(X)$ 的秩

记 $[i\ j]$ $(i \neq j)$ 为 X 上的一个变换, 它将 i 变为 j, 而将其他点映为自身. 不难验证, $[i\ j]$ 是 $T_E(X)$ 中亏值为 1 的幂等元当且仅当 $(i, j) \in E$. 为方便计, 记 $\pi = [1\ 2]$. 令 $\pi_* = [A\ B]$ 表示 X 上的变换, 它将 A 保序地映满 B, 而将 B 中的点映为自身. 换言之,

$$\pi_* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \end{pmatrix}.$$

下面的等式的验证都是例行公事, 略去证明

引理 3　(1) $(1\ i)\pi(1\ i) = [i\ 2]$, $(3 \leq i \leq n)$.

(2) $(2\ j)\pi(2\ j) = [1\ j]$, $(3 \leq j \leq n)$.

(3) $(1\ i)(2\ j)\pi(2\ j)(1\ i) = [i\ j]$, $(3 \leq i, j \leq n, i \neq j)$.

(4) $(i\ j)[i\ j](i\ j) = [j\ i]$, $(1 \leq i, j \leq n, i \neq j)$.

(5) $\tau_*\pi\tau_* = [n+1\ n+2]$.

(6) $\tau_*(1\ i)\pi(1\ i)\tau_* = [n+i\ n+2]$, $(3 \leq i \leq n)$.

(7) $\tau_*(2\ j)\pi(2\ j)\tau_* = [n+1\ n+j]$, $(3 \leq j \leq n)$.

(8) $\tau_*(1\ i)(2\ j)\pi(2\ j)(1\ i)\tau_* = [n+1\ n+j]$, $(3 \leq j \leq n, i \neq j)$.

(9) $\tau_*(i\ j)(i\ j)\tau_* = [n+j\ n+i]$, $(1 \leq i, j \leq n, i \neq j)$.

(10) $\tau_*\pi_*\tau_* = [B\ A]$.

由定理 1, 每个循环置换 $(i\ j)$ $(1 \leq i, j \leq n)$ 都能表示成 τ, ζ, τ_* 的乘积 进而, 据这个引理和本节开头的说明, 可知

推论 1　$T_E(X)$ 中每个亏值为 1 的幂等元都可以表示成 τ, ζ, τ_*, π 的乘积

下面的结论可参看文献[1].

引理 4　设 $\varphi \in T_A$ (集合 A 上的全变换半群), 满足 $|\mathrm{Im}\,\varphi| = r \leq n-1$, 并且 $i, j \in A$ 是两个不同的点, 使得 $i\varphi = j\varphi$ 取 $z \in X - \mathrm{Im}\,\varphi$ 定义 $\hat{\varphi}$ 为:

$$i\hat{\varphi} = z, k\hat{\varphi} = k\varphi (k \neq i),$$

则 $\hat{\varphi} \in T_A$, $|\mathrm{Im}\,\hat{\varphi}| = r+1$, 并且 $\varphi = [i\ j]\hat{\varphi}$

反复利用这个引理, 可得到下面的结果, 它在主要定理的证明中起到关键作用

引理 5　设 $\varphi \in T_E(X)$ 是 E-不变的, 如果 φ 在 A 或 B 上的限制是单位映射, 那么 φ 可以表示成 $T_E(X)$ 中一个置换和一些亏值是 1 的幂等元的乘积

证明　不失一般性, 设 φ 在 B 上的限制是单位映射, 那么 φ 就可以看成 A 上的一个变换 由引理 4, $\varphi = [i_1 j_1]\varphi_1$, 这里 $i_1, j_1 \in A$ $(i_1 \neq j_1)$, φ_1 是 X 上的一个变换, 它在 A 上的限制是 A 上的一个变换, 在 B 上的限制是单位映射, 并且 $|\mathrm{Im}\,\varphi_1| = |\mathrm{Im}\,\varphi| + 1$. 对于 φ_1 作同样的讨论, 有 $\varphi_1 = [i_2\ j_2]\varphi_2$ 同样地, $i_2, j_2 \in A$ $(i_2 \neq j_2)$. φ_2 是 X 上的一个变换, 它在 A 上的限制是 A 上的一个变换, 在 B 上的限制是单位映射, 并且 $|\mathrm{Im}\,\varphi_2| = |\mathrm{Im}\,\varphi_1| + 1$. 由于 A 含有 n 个点, 有限步之后, 可以得到 X 的一个变换 φ_k, 使得 $|\mathrm{Im}\,\varphi_k| = |A| = n$, 且 φ_k 在 A 上的限制是 A 的一个置换, 在 B 上的限制为单位映射, 即 φ_k 为上

一个置换, 使得

$$\varphi = [i_1 j_1][i_2 j_2]\cdots[i_k j_k]\varphi_0$$

注意到 $i_t, j_t \in A\ (1 \leq t \leq k)$, 故每个 $[i_t j_t]$ 都是半群 $T_E(X)$ 中亏值为 1 的幂等元. 从而对于所设情形结论成立. 类似的方法可证明剩下的情形. 证毕.

现在我们可以叙述和证明本文的主要定理.

定理 2 设 $f \in T_E(X)$ 为任意一个元素, 则 f 可以表示成 $\tau, \zeta\pi, \tau_*, \pi_*$ 的乘积. 进而 $T_E(X) = \langle \tau, \zeta\pi, \tau_*, \pi_* \rangle$.

证明 先证明一个特殊情形. 假设 f 是 E-不变的. 令 $f_1 = (f|A) \cup 1_B, f_2 = (f|B) \cup 1_A$. 那么 f_1 和 f_2 都满足引理 5 的条件, 故都能表示成亏值为 1 的幂等元和一个置换的乘积. 再由推论 1 和定理 1, 可知 f_1, f_2 都能表示成 $\tau, \zeta\pi, \tau_*$ 的乘积. 而 $f = f_1 f_2$, 所以这时 f 可表示成这 4 个元素的乘积.

下面考虑一般情形. 这里分 3 种情形讨论.

(1)A, B 与 f 的像集的交都不是空集. 如果 f 是 E-不变的, 上面已经证明. 故只需证明 f 不是 E-不变的情形. 设 $Af \subset B, Bf \subset A$. 这时 $f\tau_*$ 是 E-不变的, 从而可以表示成 $\tau, \zeta\pi, \tau_*$ 的乘积. 设 $f\tau_* = p(\tau, \zeta\pi, \tau_*)$. 于是 $f = p(\tau, \zeta\pi, \tau_*)\tau_*$, 仍然是这 4 个元素的乘积.

(2)A 与 f 的像集的交是空集. 即 $Af \subset B, Bf \subset B$. 令 $g: B \to A$ 为保序的双射. 令

$$f_1 = (f|A)g \cup 1_B, f_2 = (f|B) \cup 1_A.$$

容易验证 f_1, f_2 都是 $T_E(X)$ 中 E-不变的变换, 并且 $f = f_1 f_2 \pi_*$. 由(1)的结论, 可知 f 能表示成所要求的 5 个元素的乘积.

(3)B 与 f 的像集的交是空集. 即 $Af \subset A, Bf \subset A$. 令 $h: A \to B$ 为保序的双射. 令

$$f_1 = (f|A) \cup 1_B, f_2 = (f|B)h \cup 1_A.$$

同样地, 不难验证 f_1, f_2 都是 $T_E(X)$ 中 E-不变的变换, 并且利用引理 3(10), 有 $f = f_1 f_2 [B\ A] = f_1 f_2 \tau_* \pi_* \tau_*$. 于是 f 可以表示为所要求的 5 个元素的乘积. 证毕.

推论 2 设 X 是一个集合, $|X| = 2n\ (n \geq 3)$, $E = (A \times A) \cup (B \times B)$ 是 X 上的等价关系, 它的两个等价类 A, B 都含有 n 个点. 那么半群 $T_E(X)$ 的秩 ≤ 5.

参考文献:

[1] HOWIE J M. *Fundamentals of semigroup theory*[M]. Oxford University Press, 1995.

[2] HOWIE J M. *The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation semigroup*[J]. J London Math Soc, 1966, 41: 707-716.

[3] HOWIE J M. *Idempotent generators in finite full transformation semigroups*[M]. Proc Royal Soc Edinburgh, 1978, A81: 317-323.

[4] GOMES G M S, HOWIE J M. *On the ranks of certain finite semigroup of transformations*[J]. Math Proc Camb Phil Soc, 1987, 101: 395-403.

[5] VOROB'EV N N. *On symmetric associative systems*[J]. Leningrad Gos Ped Inst Uch Zap, 1953, 89: 161-166.

[6] MAGILL K D, Jr. *Semigroups of functions generate by idempotents*[J]. J London Math Soc, 1969, 44: 236-242.

[7] PEI Huisheng. *Equivalences, α-semigroups and α-congruences*[J]. Semigroup Forum, 1994, 49: 49-58.

[8] PEI Huisheng, GUO Yufang. *Some congruences on $S(X)$*[J]. Southeast Asian Bull Math, 2000, 24: 73-83.

[9] PEI Huisheng. *A unique atom in $[C(\omega), C_\alpha(\omega)]$*[J]. East-west J of Math, 1999, (2): 197-205.

[10] PEI Huisheng. *A regular-semigroup inducing a certain lattice*[J]. Semigroup Forum, 1996, 53: 98-113.

On the rank of a kind of transformation semigroups

PEI Hui-sheng

(College of Mathematics and Information Science, Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China)

Abstract: Let T_X be the full transformation semigroup on the set X, E be an equivalence on X, let

$$T_E(X) = \{f \in T_X : \forall (x, y) \in E, (f(x), f(y)) \in E\}.$$

Then $T_E(X)$ is a subsemigroup of T_X. In this paper, a special case is considered, that is, the equivalence E has two classes each of which is of n points. It is found that $T_E(X)$ has a generating set containing 5 elements. Then it is determined that the rank of $T_E(X)$ is no more than 5.

Key words: transformation semigroup; equivalence; generating set; permutation

责任编校: 郭红建