信阳师范学院学报(自然科学版)
第14卷 第4期 2001年10月

Journal of Xinyang Teachers College
(Natural Science Edition) Vol. 14 No. 4 Oct. 2001

·基础理论研究·

基于广义小波高斯积分的小波积分法及误差估计

龙爱芳

(中南民族学院 计算机科学学院, 湖北 武汉 430074)

摘 要: 应用具有2次代数精度的带Daubechies小波尺度函数的广义高斯积分公式, 通过双尺度方程, 得到具有高精度的积分公式. 在此基础上, 应用外推技术得到具有更高精度的积分值.

关键词: 小波; 尺度函数; 双尺度方程; 外推

中图分类号: O241.1　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1003-0972(2001)04-0384-04

小波理论及其应用研究已在数学、通讯、地震、化学等领域作为一种新的数学工具受到高度重视, 它在信号分析、图像存储与重构、函数逼近与微分方程求解等方面呈现出强劲的发展势头[1~5]. 小波理论的函数变换(尺度函数变换与小波函数变换)中, 均涉及到分解系数的积分运算, 在多数情况下, 小波基函数是用数值格式生成的, 这样其分解系数的运算往往采取数值积分方式获得. 在此基础上, 再进行函数(或信号、图像)的重构. 显然重构函数的精度与分解系数的精度密切相关, 因此, 构造具有高精度的数值求积公式显得极为重要. 文[6]应用积分公式 $\int f(x)\Phi(x)\mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(l)}{2}$, 在应用双尺度方程结合外推算法可得到积分近似值. 但由于以上公式的精度较低, 因此需要花费的机时较多. 本文应用具有2次代数精度的带Daubechies小波尺度函数的广义高斯积分公式, 通过双尺度方程, 得到具有高精度的积分公式, 在此基础上, 应用外推算法, 进一步提高精度, 使得数值求积达到预想的精度, 重构的信号、图像非常准确, 微分方程的数值解的精度非常高.

1 小波高斯积分法

对于Daubechies尺度函数 $\Phi(x)$, 支撑域为 $\mathrm{supp}\,\Phi(x) = [0, 2N-1]$, 令 $l = 2N-1$, 同时具有如下性质:

$$\int\Phi(x)\mathrm{d}x = 1,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{m,k}(x)\Phi_{m,i}(x)\mathrm{d}x = \delta_{ki}.$$

其中 $\Phi_{m,k}(x) = 2^{m/2}\Phi(2^m x - k)$.

$\forall f \in C[a,b]$, 其尺度函数变换的分解与重构定义为:

$$a_k = \langle f(x), \Phi_{m,k}(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi_{m,k}(x)\mathrm{d}x, \quad (1)$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\Phi_{m,k}(x).$$

有关分解系数(1)积分计算的广义小波高斯积分定义为:

$$\int\Phi(x)f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k). \quad (2)$$

其中 x_k, A_k 分别为高斯点和高斯积分的权系数[7]. 当(1)式对于 $f(x)$ 取不高于 $2n+1$ 次的多项式能准确成立时, 则称积分公式(2)具有 $2n+1$ 次代数精度.

定理1 若 $\Phi(x)$ 为正交小波的尺度函数, 且 $N > 1$, 则 $M_2 = M_1^2$, 其中 M_1, M_2 分别为尺度函数 $\Phi(x)$ 的矩

收稿日期: 2001-05-02
作者简介: 龙爱芳(1969-), 女, 广西桂林人, 中南民族学院计算机科学学院讲师.

$$M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x\Phi(x)\,dx, M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\Phi(x)\,dx.$$

证明 令 $k_m = \langle x, \Phi(x)\Phi(x-m)\rangle$, 则

$$\begin{aligned} K_m &= \langle x, \Phi(x)\Phi(x-m)\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\Phi(x)\Phi(x-m)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (m+x)\Phi(x+m)\Phi(x)\,dx \\ &= m\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\Phi(x+m)\,dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} x\Phi(x)\Phi(x-m)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\Phi(x)\Phi(x+m)\,dx \\ &= k_{-m}, \end{aligned}$$

所以

$$\sum_m m k_m = \langle x, \Phi(x)\sum_m m\Phi(x-m)\rangle = 0. \quad (3)$$

因为有 $N > 1$, 由

$$\sum_m (x-m)^p\Phi(x-m) = M_p, 0 \le p \le N,$$

所以 $\sum_m m\Phi(x-m) = x - M_1$, 代入(3)式就有 $\langle x, \Phi(x)(x-M_1)\rangle = 0$, 即 $\langle x, x\Phi(x)\rangle - M_1\langle x, \Phi(x)\rangle = 0$. 即 $M_2 = M_1^2$.

设单点广义高斯公式为

$$\int f(x)\Phi(x)\,dx = A_1 f(x_1),$$

因为 $\int\Phi(x)\,dx = 1$, 所以 $A_1 = 1$, 则

$$\int f(x)\Phi(x)\,dx \approx f(x_1) \quad (4)$$

只要取 $x_1 = M_1$, 则积分公式(4)有1次代数精度, 由定理1知 $M_2 = M_1^2$, 则积分公式(4)有2次代数精度, 而 M_1 由下式给出:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x\Phi(x)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{l} h_k \int_{-\infty}^{\infty} x\Phi(2x-k)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{l} h_k\int_{-\infty}^{\infty} x\Phi(x)\,dx + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{l} kh_k \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{l} h_k M_1 + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{l} kh_k \\ &= \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{l} kh_k, \end{aligned}$$

以上用到 $\sum_{k=0}^{l} h_k = 2$, 即 $M_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{l} kh_k$.

2 基于广义小波高斯积分的小波积分法

$I(f) = \int\Phi(x)f(x)\,dx$, 应用双尺度方程 $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{l} h_k\Phi(2x-k)$ 得:

$$\begin{aligned} I(f) &= \sum_{k1=0}^{l} h_{k1}\int\Phi(2x-k)f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k1=0}^{l} h_{k1}\int\Phi(x)f\left(\frac{x+k1}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2^2}\sum_{k1=0}^{l}\sum_{k2=0}^{l} h_{k1}h_{k2}\int\Phi(x)f\left(\frac{x}{2^2}+\frac{k2}{2^2}+\frac{k1}{2}\right)dx \\ &= \cdots \\ &= \frac{1}{2^p}\sum_{k1,k2,\cdots kp=0}^{l} h_{k1}h_{k2}\cdots h_{kp}\int\Phi(x)f\left(\frac{x}{2^p}+\frac{k1}{2}\right. \\ &\quad \left.+\frac{k2}{2^2}+\cdots+\frac{kp}{2^p}\right)dx. \end{aligned}$$

令 $\frac{1}{2^p} = h$, $\frac{k1}{2}+\frac{k2}{2^2}+\cdots+\frac{kp}{2^p} = m$, 则

$$\begin{aligned} I(f) &= h\sum_{k1,k2,\cdots,kp=0}^{l} h_{k1}\cdots h_{kp}\int\Phi(x)f\left(\frac{x}{2^p}+m\right)dx \\ &= \sum_{k1,k2,\cdots,kp=0}^{l} h_{k1}\cdots h_{kp}\int\Phi(2^p x)f(x+m)\,dx. \end{aligned}$$

应用具有2次代数精度的广义高斯公式(4)得以下积分公式:

$$I(h) = h\sum_{k1,k2,\cdots,kp=0}^{l} h_{k1}h_{k2}\cdots h_{kp} f\left(\frac{x_1}{2^p}+\frac{k1}{2}+\frac{k2}{2^2}+\cdots+\frac{kp}{2^p}\right), x_1 = M_1. \quad (5)$$

以下令 $I(f) = I$.

3 积分公式(5)的误差估计

把 $f(x+m)$ 在 $\frac{lh}{2}$ 处展开:

$$\begin{aligned} f(x+m) &= f\left(\frac{lh}{2}+m\right) + f'\left(\frac{lh}{2}+m\right)\left(x-\frac{lh}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2!}f''\left(\frac{lh}{2}+m\right)\left(x-\frac{lh}{2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''\left(\frac{lh}{2}+m\right)\left(x-\frac{lh}{2}\right)^3 + \cdots, \end{aligned}$$

令 $H_p = \sum_{k1,k2,\cdots,kp=0}^{l} h_{k1}h_{k2}\cdots h_{kp}$, 则

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k1,k2,\cdots,kp=0}^{l} h_{k1}h_{k2}\cdots h_{kp}\int f\left(\frac{lh}{2}+m\right)\Phi(2^p x)\,dx \\ &\quad + \sum_{k1,k2,\cdots,kp=0}^{l} h_{k1}h_{k2}\cdots h_{kp}\int f'\left(\frac{hl}{2}\right. \\ &\quad \left.+m\right)\left(x-\frac{lh}{2}\right)\Phi(2^p x)\,dx \\ &\quad + \frac{1}{2!}\sum_{k1,k2,\cdots,kp=0}^{l} h_{k1}h_{k2}\cdots h_{kp}\int f''\left(\frac{hl}{2}\right. \\ &\quad \left.+m\right)\left(x-\frac{lh}{2}\right)^2\Phi(x^p x)\,dx \\ &\quad + \frac{1}{3!}\sum_{k1,k2,\cdots,kp=0}^{l} h_{k1}h_{k2}\cdots h_{kp} f'''\left(\frac{lh}{2}\right. \end{aligned}$$

$$+ m)(x - \frac{lh}{2})^3\Phi(2^p x)\,dx + \cdots$$

$$= H_p f(\frac{lh}{2} + m)\, h \int \Phi(x)\,dx$$

$$+ H_p f'(\frac{lh}{2} + m)\, h^2 \int (x - \frac{l}{2})\Phi(x)\,dx$$

$$+ \frac{1}{2!} H_p f''(\frac{lh}{2} + m)\, h^3 \int (x - \frac{l}{2})^2\Phi(x)\,dx$$

$$+ \frac{1}{3!} H_p f'''(\frac{lh}{2} + m)\, h^4 \int (x - \frac{l}{2})^3\Phi(x)\,dx$$

$$+ \cdots.$$

令 $\frac{1}{n!} f^{(n)}(\frac{lh}{2} + m) = f^{(n)}_{1/2}$, $Q_n = \int (x - \frac{l}{2})^n \Phi(x)\,dx$, $K_n = (x_1 - \frac{l}{2})^n$, $a_n = K_n - Q_n$, 则

$$I = hH_p f(\frac{lh}{2} + m) + h^2 H_p f'_{1/2} Q_1 + h^3 H_p f''_{1/2} Q_2 + h^4 H_p f'''_{1/2} Q_3 + \cdots \quad (6)$$

应用积分公式(4)得:

$$I(h) = hH_p f(\frac{lh}{2} + m) + h^2 H_p f'_{1/2} K_1 + h^3 H_p f''_{1/2} K_2 + h^4 H_p f'''_{1/2} K_3 + \cdots \quad (7)$$

由(6)、(7)式得:

$$I(h) = I + h^2 H_p f'_{1/2}(K_1 - Q_1) + h^3 H_p f''_{1/2}(K_2 - Q_2) + h^4 H_p f'''_{1/2}(K_3 - Q_3) + \cdots,$$

因为积分公式(4)有 2 次代数精度, 所以

$$\begin{aligned} I(h) &= I + h^4 H_p f'''_{1/2}(K_3 - Q_3) + h^5 H_p f^{(4)}_{1/2}(K_4 - Q_4) + h^6 H_p f^{(5)}_{1/2}(K_5 - Q_5) + \cdots \\ &= I + a_3 h^4 H_p f'''_{1/2} + a_4 h^5 H_p f^{(4)}_{1/2} + a_5 h^6 H_p f^{(5)}_{1/2} + \cdots. \quad (8) \end{aligned}$$

令 $\int f^{(n)}(x)\Phi(x)\,dx = I^{(n)}$, 由(6) 得:

$$I^{(n)} = hH_p f^{(n)}_{1/2} + h^2 H_p f^{(n+1)}_{1/2} Q_1 + h^3 H_p f^{(n+2)}_{1/2} Q_2 + h^4 H_p f^{(n+3)}_{1/2} Q_3 + \cdots$$

即

$$hH_p f^{(n)}_{1/2} = I^{(n)} - h^2 H_p f^{(n+1)}_{1/2} Q_1 - h^3 H_p f^{(n+2)}_{1/2} Q_2 - h^4 H_p f^{(n+3)}_{1/2} Q_3 - \cdots, \quad (9)$$

(9)中令 $n = 3$ 代入(8)得:

$$I(h) = I + a_3 I^{(3)} h^3 + (a_4 - a_3 Q_1) h^5 H_p f^{(4)}_{1/2} + (a_5 - a_3 Q_2) h^6 H_p f^{(5)}_{1/2} + \cdots \quad (10)$$

(9)中令 $n = 4$ 代入(10)得:

$$I(h) = I + a_3 I^{(3)} h^3 + (a_4 - a_3 Q_1) I^{(4)} h^4 + (a_5 - Q_2 a_3 - Q_1 a_4 + a_3 Q_1^2) h^6 H_p f^{(5)}_{1/2} + \cdots$$

依次下去得:

$$I(h) = I + c_3 h^3 + c_4 h^4 + c_5 h^5 + \cdots.$$

其中 $c_3 = a_3 I^{(3)}$, $c_4 = a_4 - a_3 Q_1$, …, 这里 c_k, $k = 3, 4, 5, \cdots$ 与 h 无关. 于是有以下定理:

定理 2　设 $f(x) \in C^\infty[0, l]$, 则有以下展开式成立

$$I(h) = I(f) + c_3 h^3 + c_4 h^4 + c_5 h^5 + \cdots$$

式中 c_k, $k = 3, 4, 5, \cdots$ 与 h 无关.

所以　$|I(h) - I(f)| \le M h^3$, M 为常数.

4　外推技术提高精度

因为 $I(h) = I + c_3 h^3 + c_4 h^4 + c_5 h^5 + \cdots$, 所以

$$I_1(h) = \frac{2^3}{2^3 - 1} I(\frac{h}{2}) - \frac{1}{2^3 - 1} I(h) = I + d_4 h^4 + d_5 h^5 + d_6 h^6 + \cdots,$$

同样可得

$$I_2(h) = \frac{2^4}{2^4 - 1} I_1(\frac{h}{2}) - \frac{1}{2^4 - 1} I_1(h) = I + e_5 h^5 + e_6 h^6 + e_7 h^7 + \cdots,$$

如此下去每加速一次误差的量级变提高一阶.

记 I_0^k, $k = 1, 2, 3, \cdots$, 表示应用 k 次双尺度方程采用具有 2 次代数精度的广义小波高斯积分公式(5)所得的积分值, 以 I_m^k 表示序列$\{I_0^k\}$的 m 次加速值, 则由上述加速方法得如下公式:

$$I_m^k = \frac{2^{m+2}}{2^{m+2} - 1} I_{m-1}^{k+1} - \frac{1}{2^{m+2} - 1} I_{m-1}^k, \quad m = 1, 2, 3, \cdots.$$

可以逐次构造下列用于外推的三角形数表:

I_0^0				
I_0^1	I_1^0			
I_0^2	I_1^1	I_2^0		
I_0^3	I_1^2	I_2^1	I_3^0	
…	…	…	…	…

综合以上推导, 得以下的积分公式:

$$I_0^p = \frac{1}{2^p} \sum_{k1, k2, \cdots, kp = 0}^{l} h_{k1} h_{k2} \cdots h_{kp} f(\frac{x_1}{2^p} + \frac{k1}{2} + \frac{k2}{2^2} + \cdots \frac{kp}{2^p}), \quad x_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{l} k h_k,$$

$$I_m^k = \frac{2^{m+2}}{2^{m+2} - 1} I_{m-1}^{k+1} - \frac{1}{2^{m+2} - 1} I_{m-1}^k, \quad m = 1, 2, 3, \cdots.$$

5　数值试验

我们选Daubechies 尺度函数 $\Phi(x)$, $N = 5$, 则 $l = 9$.

例 1　计算 $\int e^x \Phi(x)\,dx$.

表 1　例 1 的三角形数表

3.3000						
3.2454	3.2376					
3.2383	3.2373	3.2372				
3.2374	3.2372	3.2372	3.2372			
3.2373	3.2372	3.2372	3.2372	3.2372		
3.2372	3.2372	3.2372	3.2372	3.2372	3.2372	
3.2372	3.2372	3.2372	3.2372	3.2372	3.2372	3.2372

$$|I_0^6 - I_0^5| = 1.7512e\text{-}006,$$
$$|I_6^0 - I_5^0| = 2.1316e\text{-}001.$$

例 2　计算 $\int x^4 \Phi(x)\,\mathrm{d}x$.

表 2　例 2 的三角形数表

2.0318						
1.5239	1.4513					
1.4604	1.4513	1.4513				
1.4524	1.4513	1.4513	1.4513			
1.4514	1.4513	1.4513	1.4513	1.4513		
1.4513	1.4513	1.4513	1.4513	1.4513	1.4513	
1.4513	1.4513	1.4513	1.4513	1.4513	1.4513	1.4513

$$|I_0^6 - I_0^5| = 1.5501e\text{-}005,$$
$$|I_6^0 - I_5^0| = 8.4710e\text{-}013.$$

例 3　计算 $\int \sin\left(\frac{x}{80}\right)\Phi(x)\,\mathrm{d}x$.

表 3　例 3 的三角形数表

0.0149						
0.0149	0.0149					
0.0149	0.0149	0.0149				
0.0149	0.0149	0.0149	0.0149			
0.0149	0.0149	0.0149	0.0149	0.0149		
0.0149	0.0149	0.0149	0.0149	0.0149	0.0149	
0.0149	0.0149	0.0149	0.0149	0.0149	0.0149	0.0149

$$|I_0^6 - I_0^5| = 1.0454e\text{-}012,$$
$$|I_6^0 - I_5^0| = 1.1262e\text{-}014.$$

从以上可以看出, 直接利用公式(5) 精度相当高, 如继续用外推则精度更高.

参考文献:

[1]　DAUBECHIES I. *Orthonormal basses of compactly supported wavelets*[J]. Commun Pure Appl Math, 1998, 41: 909-996.

[2]　WILLIAMS J R, AMARATUNGA K. *Introduction to wavelets in engineering*[M]. Int J for Numerical Methods in Engineering, 1994: 37: 2365-2388.

[3]　MOTARD R L, JOSEPH B. *Wavelet applications in chemical engineering*[J]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994.

[4]　AMRATUNGA K, WILL M J. *Wavelet-galerkin solution for one-dimensional partial differential equations*[J]. Int J for Numberical Methods in Engineering, 1994; 37: 2703-2716.

[5]　周文和, 王记增. 广义小波高斯积分法及其在微分方程中的应用[A]. 现代力学与数学MMM-Ⅶ[C]. 上海: 上海大学出版社, 1997. 464-467.

[6]　蔡　超, 徐长发. 带有小波函数积分的外推加速算法[J]. 应用数学, 1999, 12(3): 21-25.

[7]　王能超. 数值分析简明教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1994. 136-144.

An error estimation of integral method in wavelet theory based on Gaussian integral

LONG Ai-fang

(Dept. of Computer Science, South-central University for Nationalities, Wuhan 430074, China)

Abstract: Based on the Gaussian integral method, using the scaling function of Daubechies wavelet, an integral method is given. From some examples and it's error estimation, it is shown that the approach effect is very good.

Key words: wavelet; scaling function; double scaling formula; extrapolation

责任编辑: 郭红建