广义 Baskakov 算子的导数与函数的光滑性

孙渭滨
(宁夏大学，银川 750021)

摘　要　本文研究了广义 Baskakov 算子的导数与函数的光滑性之间的等价关系，即

$|M_n'(f,x)|\leqslant M_1\left\{\min\left((n^2,\frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)\right\}^{\frac{1-\beta}{2}}$ 当且仅当 $\omega_1(f,h)\leqslant M_2h^\beta$，

其中 $0<\beta\leqslant 1$

$|M_n''(f,x)|\leqslant M_3\left\{\min\left(n^2,\frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)\right\}^{\frac{2-\beta}{2}}$ 当且仅当 $\omega_2(f,h)\leqslant M_4h^\beta$

其中 $0<\beta\leqslant 2$。

关键词　广义 Baskakov 算子，导数，光滑性

分类号　O177.4

用 $C[0,+\infty)$ 表示 $[0,+\infty)$ 上全体连续函数的集合。对 $f\in C[0,+\infty)$，其广义 Baskakov 算子定义如下：

$$M_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot M_{n,k}^{\alpha}(x),$$

其中

$$M_{n,k}^{\alpha}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)\cdot k!}\cdot(\alpha x)^k\cdot(1+\alpha x)^{\left(\frac{n}{\alpha}+k\right)}\qquad \alpha>0$$

本文的目的是描述正线性算子 $M_n(f;x)$ 的一阶、二阶导数与函数的光滑性之间的关系。我们建立了以下定理：

定理　设 $f\in C[0,+\infty)$，且对某个 $r>0$ 有

$\omega_1(f,\eta)\leqslant k\eta^r$，则

(i)　当 $0<\beta\leqslant 1$ 时，$|M_n'(f;x)|\leqslant M_1\left\{\min\left(n^2,\frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)\right\}^{\frac{1-\beta}{2}}$ 当且仅当 $\omega_1(f,h)\leqslant M_2h^\beta$；

(ii) 当 $0<\beta\leqslant 2$ 时，$|M_n''(f;x)|\leqslant M_3\left\{\min\left(n^2,\frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)\right\}^{\frac{2-\beta}{2}}$ 当且仅当 $\omega_2(f,h)\leqslant M_4h^\beta$。

其中 $M_i(i=1,2,3,4)$ 是常数，$\omega_i(f,h)(i=1,2)$ 是 f 的 i 阶连续模。

1　引理

引理 1　下列各式成立

$M_n(1;x)=1,M_n(t,x)=x,M_n((t-x)^2;x)=\frac{x(1+\alpha x)}{n}$　。

收稿日期　1992—11—20

证明 利用 Gamma 函数的性质及幂级数的性质，引理1不难证明。

引理2 设 $f\in C[0,+\infty)$，$\eta>0$，则存在函数 $f_{1\eta}$ 和 $f_{2\eta}$，使

(a) $|f(x)-f_{1\eta}(x)|\leqslant\omega_1(f,\eta)$，$|f'_{1\eta}(x)|\leqslant\frac{1}{\eta}\omega_1(f,\eta)$；

(b) $|f(x)-f_{2\eta}(x)|\leqslant 5\omega_2(f,\eta)$，$|f''_{2\eta}(x)|\leqslant\frac{5}{\eta^2}\omega_2(f,\eta)$ 。

证明 延拓函数 $f(x)$，当 $x<0$ 时令 $f(x)=f(0)$。作 steklov 函数

$$f_{1\eta}(x)=\frac{1}{\eta}\int_{-\frac{\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}}f(x+u)\mathrm{d}u$$

则 $|f(x)-f_{1\eta}(x)|\leqslant\frac{1}{\eta}\int_{-\frac{\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}}|f(x+u)-f(x)|\mathrm{d}u\leqslant\omega_1(f,\eta)$，

$$|f'_{1\eta}(x)|=\frac{1}{\eta}\left|f\left(x+\frac{\eta}{2}\right)-f\left(x-\frac{\eta}{2}\right)\right|\leqslant\frac{1}{\eta}\omega_1(f,\eta)\quad。$$

(b)的证明可仿(a)进行，只要做函数

$$f_{2\eta}(x)=\frac{1}{\eta^2}\int_{-\frac{\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}}\int_{-\frac{\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}}f(x+u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$ 即可。

引理3 设 $f\in C[0,+\infty)$，则

$$|M_n(f;x)-f(x)|\leqslant 4\omega_2\left(f,\sqrt{\frac{x(1+\alpha x)}{n}}\right)\quad,$$

$$|M_n(f;x)-f(x)|\leqslant 8\omega_1\left(f,\sqrt{\frac{x(1+\alpha x)}{n}}\right)。$$

证明 由[2]的推论2.21可得第一个不等式，而第二个不等式可由连续模的性质从第一个不等式得到。

引理4 下述估计成立

$$|M'_n(f;x)|\leqslant n\omega_1\left(f,\frac{1}{n}\right),$$

$$|M''_n(f;x)|\leqslant c_1\omega_2(f,\eta)\cdot\left(\frac{n}{x(1+\alpha x)}+\frac{1}{\eta^2}\right)\quad。$$

证明 因为

$$M'_n(f;x)=\frac{1}{(1+\alpha x)}\sum_{k=0}^{\infty}(n+\alpha k)\triangle_{\frac{1}{n}}f\left(\frac{k}{n}\right)M^{\alpha}_{n,k}(x),$$

所以由引理1可得到

$$|M'_n(f;x)|\leqslant n\omega_1\left(f,\frac{1}{n}\right)\quad。$$

由于 $M''_n(f;x)=(x(1+\alpha x))^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}[(k-nx)^2+n\alpha x^2-k-2k\alpha x]M^{\alpha}_{n,k}(x)f\left(\frac{k}{n}\right)$，

所以
$$\begin{aligned}|M''_n(f-f_{2\eta};x)|&\leqslant 5\omega_2(f,\eta)(x(1+\alpha x))^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}[(k-nx)^2+k+2k\alpha x+n\alpha x^2]M^{\alpha}_{n,k}(x)\\&=5\omega_2(f,\eta)(x(1+\alpha x))^{-2}(4n\alpha x^2+2nx)\\&\leqslant 20\omega_2(f,\eta)n(x(1+\alpha x))^{-1}\quad。\end{aligned}$$

且注意到引理2与微分中值定理，有

$$\begin{aligned}|M''_n(f_{2\eta};x)|&\leqslant(1+\alpha x)^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}(n+\alpha k)(n+\alpha k+\alpha)M^{\alpha}_{n,k}(x)\left|\triangle^2_{\frac{1}{n}}f_{2\eta}\left(\frac{k}{n}\right)\right|\\&\leqslant 10n^{-2}\eta^{-2}\omega_2(f,\eta)(1+\alpha x)^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}(n+\alpha k)(n+\alpha k+\alpha)M^{\alpha}_{n,k}(x)\end{aligned}$$

$$=10n^{-2}\eta^{-2}\omega_2(f,\eta)(1+\alpha x)^{-2}[n^2(1+\alpha x)^2+n\alpha(1+x\alpha)^2]$$
$$\leqslant 10n^{-2}\eta^{-2}\omega_2(f,\eta)(n+\alpha)^2$$
$$\leqslant 10([\alpha]+2)^2\eta^{-2}\omega_2(f,\eta)\quad。$$

所以我们有

$$|M_n''(f;x)|\leqslant|M_n''(f-f_{2\eta};x)|+|M_n''(f_{2\eta};x)|$$
$$\leqslant c_1\omega_2(f,\eta)\left(\frac{n}{x(1+\alpha x)}+\frac{1}{\eta^2}\right)\quad。$$

其中 $C_1=\max\{20,10([\alpha]+2)^2\}$ 。

2 定理的证明

先证(i)。充分性:若 $\omega_1(f,h)\leq M_2h^\beta$。

一方面,由引理 4 的(a)立即可得

$$|M_n'(f;x)|\leqslant M_2n^{1-\beta}\quad。$$

另一方面,因为

$$|M_n'(f;x)|\leqslant|M_n'(f-f_{1\eta};x)|+|M_n'(f_{1\eta};x)|\quad,$$

而

$$|M_n'(f-f_{1\eta};x)|\leqslant(x(1+\alpha x))^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}|f(\frac{k}{n})-f_{1\eta}(\frac{k}{n})||k-nx|M_{n,k}^{\alpha}(x)$$
$$\leqslant(x(1+\alpha x))^{-1}\omega_1(f,\eta)\sum_{k=0}^{\infty}|k-nx|M_{n,k}^{\alpha}(x)$$
$$\leqslant n(x(1+\alpha x))^{-1}\omega_1(f,\eta)\Big[\sum_{|\frac{k}{n}-x|<\delta}+\sum_{|\frac{K}{n}-x|\geqslant\delta}\Big]|\frac{K}{n}-x|M_{n,k}^{\alpha}(x)$$
$$\leqslant n(x(1+\alpha x)^{-1}\omega_1(f,\eta)\left[\delta+\frac{1}{n^2\delta}\sum_{K=0}^{\infty}(k-nx)^2M_{n,k}^{\alpha}(x)\right]$$
$$=n(x(1+\alpha x))^{-1}\omega_1(f,\eta)\left[\delta+\frac{1}{n\delta}x(1+\alpha x)\right]$$

取 $\delta=\sqrt{\frac{x(1+\alpha x)}{n}}$,由引理 1 知

$$|M_n'(f-f_{1\eta};x)|\leqslant 2\omega_1(f,\eta)\sqrt{\frac{n}{x(1+\alpha x)}}\quad。$$

又

$$|M_n'(f_{1\eta};x)|\leqslant(1+\alpha x)^{-1}\sum_{K=0}^{\infty}|\triangle_{\frac{1}{n}}f_{1\eta}(\frac{k}{n})|(n+\alpha k)M_{n,k}^{\alpha}(x),$$

由引理 1、引理 2 可知

$$|M_n'(f_{1\eta};x)|\leqslant\frac{1}{\eta}\omega_1(f,\eta),$$

于是 $|M_n'(f;x)|\leqslant\omega_1(f,\eta)\left[2\cdot\sqrt{\frac{n}{x(1+\alpha x)}}+\frac{1}{\eta}\right]$ 取 $\eta=\sqrt{\frac{x(1+\alpha x)}{n}}$. 则有

$$|M_n'(f;x)|\leqslant 3\omega_1\left[f,\sqrt{\frac{x(1+\alpha x)}{n}}\right]\sqrt{\frac{n}{x(1+\alpha x)}}\leqslant 3M_2\left(\frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)^{\frac{1-\beta}{2}}\quad.$$

综上所述,我们有

$$|M_n'(f;x)|\leq M_1\left\{\min\left(n^2,\frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)\right\}^{\frac{1-\beta}{2}}.$$

必要性　若 $|M_n'(f;x)|\leq M_1\left\{\min\left(n^2,\dfrac{n}{x(1+\alpha x)}\right)\right\}^{\frac{1-\beta}{2}}$.

由于

$$
\begin{aligned}
|\triangle_h f(x)| &\leqslant |\triangle_h(f(x)-M_n(f;x)|+\left|\int_x^{x+h}M_n'(f;u)\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant 2\max_{u=x,x+h}|f(u)-M_n(f;u)|+\int_x^{x+h}|M_n'(f;u)|\mathrm{d}u \\
&\leqslant |b\omega_1(f,\delta,(n,x,h))+\int_x^{x+h}|M_n'(f;u)|\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

其中　$\delta_1(n,x,h)=\max\limits_{u=x,x+h}\sqrt{\dfrac{u(1+\alpha x)}{n}}$.

当　$|M_n'(f;x)|\leqslant M_1 n^{(1-\beta)}$时，有

$$\int_x^{x+h}|M_n'(f;u)|\mathrm{d}u\leqslant M_1 h(n^2)^{\frac{1-\beta}{2}}$$

当 $|M_n'(f;x)|\leqslant M_1(\dfrac{n}{x(1+\alpha x)})^{\frac{1-\beta}{2}}$时：一方面，当 $x\geqslant h$ 时，

$$
\begin{aligned}
&\int_x^{x+h}|M_n'(f;u)|\mathrm{d}u\leqslant M_1\int_x^{x+h}\left(\frac{n}{u(1+\alpha u)}\right)^{\frac{1-\beta}{2}}\mathrm{d}u \\
&\leqslant hM_1\left(\frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)^{\frac{1-\beta}{2}} \\
&\leqslant 4M_1 h\left(\frac{n}{(x+h)(1+\alpha(x+h)}\right)^{\frac{1-\beta}{2}}
\end{aligned}
$$

另一方面，当 $x<h$ 时不失一般性，可限制 $0<h<\dfrac{1}{8}$.

$$
\begin{aligned}
\int_x^{x+h}|M_n'(f;u)|du &\leqslant M_1\left(\frac{n}{1+\alpha x}\right)^{\frac{1-\beta}{2}}\int_0^{x+h}(\frac{1}{u})^{\frac{1-\beta}{2}}du \\
&\leqslant 2M_1(\frac{n}{1+\alpha x})^{\frac{1-\beta}{2}}(x+h)^{\frac{1-\beta}{2}} \\
&= 2M_1\left(\frac{(\alpha+1)n}{(\alpha+1)(1+\alpha x)}\right)^{\frac{1-\beta}{2}}(x+h)(x+h)^{-\frac{1-\beta}{2}} \\
&\leqslant 4(\alpha+1)M_1 h\left(\frac{n}{(x+h)(1+\alpha(x+h))}\right)^{\frac{1-\beta}{2}}.
\end{aligned}
$$

于是，总有

$$\left|\int_x^{x+h}M_n'(f;u)\mathrm{d}u\right|\leqslant B_1 h\left\{\min\left(n^2,\frac{n}{(x+h)(1+\alpha(x+h)}\right)\right\}^{\frac{1-\beta}{2}}$$

而对给定的 x，h，我们总可以选取充分大的 n，使得

$$\sqrt{\frac{(x+h)(1+\alpha(x+h))}{n}}<\frac{h}{T}$$

且　$$\min\left\{n,\sqrt{\frac{n}{(x+h)(1+\alpha(x+h))}}\right\}<\frac{2T}{h}$$

其中 $T>1$。

至此,我们得到

$$|\triangle_h f(x)|\leqslant A_1\omega_1(f,\frac{h}{T})+B_1h(\frac{2T}{h})^{1-\beta},$$

其中 A_1、B_1 是常数。类似于[1]的证明,即得

$$\omega_1(f,h)\leqslant M_2h^\beta \quad 。$$

下面证(ii)。充分性:若 $\omega_1(f,h)\leqslant M_4h^\beta$ 。一方面,

由于 $M_n^{''}(f;x)=(1+\alpha x)^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}(n+\alpha k)(n+\alpha k+\alpha)\triangle_{\frac{1}{n}}^2 f(\frac{k}{n})M_{n,k}^{\alpha}(x)$,

所以 $\quad |M_n^{''}(f;x)|\leqslant c_2n^{2-\beta}$

另一方面,由引理4有

$$|M_n^{''}(f;x)|\leqslant c_1\omega_2(f,\eta)\left(\frac{n}{x(1+\alpha x)}+\frac{1}{\eta^2}\right).$$

令 $\eta=\sqrt{\frac{x(1+\alpha x)}{n}}$,则

$$|M_n^{''}(f;x)|\leqslant 2c_1M_4\left(\frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)^{\frac{2-\beta}{2}} \quad .$$

综上所述,我们有

$$|M_n^{''}(f;x)|\leqslant M_3\left\{\min\left(n^2,\frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)\right\}^{\frac{2-\beta}{2}} \quad .$$

必要性 若 $|M_n^{''}(f;x)|\leqslant M_3\left\{\min(n^2,\frac{n}{x(1+\alpha x)})\right\}^{\frac{2-\beta}{2}}$.

注意到 $|\triangle_h^2 f(x)| \leqslant |\triangle_h^2(f(x)-M_n(f;x))| + |\triangle_h^2 M_n(f;x)|$

$$\leqslant 4\max_{u=x,x+h,x+2h}|f(u)-M_n(f;u)| + |\int_x^{x+h}(v-x)M_n^{''}(f;v)\mathrm{d}v|$$

$$+ |\int_{x+h}^{x+2h}(v-x-2h)M_n^{''}(f;v)\mathrm{d}v|$$

$$= I_1+I_2+I_3$$

其中 $\quad \triangle_h^2 M_n(f;x)=\int_x^{x+h}(v-x)M_n^{''}(f;v)\mathrm{d}v-\int_{x+h}^{x+2h}(v-x-2h)M_n^{''}(f;v)\mathrm{d}v.$

$$I_1=4\max_{u=x,x+h,x+2h}|f(u)-M_n(f;u)| \quad .$$

$$I_2=|\int_x^{x+h}(v-x)M_n^{''}(f;v)\mathrm{d}v| \quad .$$

$$I_3=|\int_{x+h}^{x+2h}(v-x-2h)M_n^{''}(f;v)\mathrm{d}v| \quad .$$

下面分别估计 I_1,I_2,I_3 .

由引理3

$$I_1\leqslant 16\omega_2(f,\delta_2(n,x,h)),$$

其中 $\quad \delta_2(n,x,h)=\max_{u=x,x+h,x+2h}\sqrt{\frac{u(1+\alpha u)}{n}} \quad .$

当 $\quad |M_n^{''}(f;x)|\leqslant M_3n^{2-\beta}$ 时,

$$I_2\leqslant\frac{1}{2}h^2M_3n^{2-\beta} \quad .$$

$$I_3\leqslant M_3n^{2-\beta}\int_{x+h}^{x+2h}(2h-(v-x))\mathrm{d}v=\frac{1}{2}h^2M_3n^{2-\beta} \quad .$$

此时我们有

$$I_2+I_3\leqslant M_3h^2n^{2-\beta}\quad.$$

当 $|M_n''(f;x)|\leqslant M_3\left(\frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)^{\frac{2-\beta}{2}}$ 时(不妨限制 $0<h<\frac{1}{8}$)，
一方面，当 $x\geqslant h$ 时

$$\begin{aligned}I_2&\leqslant M_3\left(\frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)^{\frac{2-\beta}{2}}\int_x^{x+h}(v-x)\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}h^2M_3\left(\frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)^{\frac{2-\beta}{2}}\\&\leqslant\frac{9}{2}M_3h^2\left(\frac{n}{(x+2h)(1+\alpha(x+2h))}\right)^{\frac{2-\beta}{2}}\quad.\end{aligned}$$

另一方面，当 $x<h$ 时

$$\begin{aligned}I_2&\leq M_3n^{\frac{2-\beta}{2}}\int_x^{x+h}(v-x)(v(1+\alpha v))^{-\frac{2-\beta}{2}}\mathrm{d}v\\&\leqslant M_3n^{\frac{2-\beta}{2}}\int_x^{x+h}v^{\frac{\beta}{2}}(1+\alpha v)^{-1+\frac{\beta}{2}}\mathrm{d}v\\&\leqslant M_3n^{\frac{2-\beta}{2}}\int_x^{x+h}v^{\frac{\beta}{2}}(1-v)^{-1+\frac{\beta}{2}}\mathrm{d}v\\&\leqslant M_3n^{\frac{2-\beta}{2}}\frac{1}{1-x-h}\int_0^{x+h}v^{\frac{\beta}{2}}\mathrm{d}v\\&\leqslant\frac{4}{3}M_3n^{\frac{2-\beta}{2}}(x+h)^{1+\frac{\beta}{2}}\\&\leqslant\frac{4}{3}M_3n^{\frac{2-\beta}{2}}[(x+2h)(1+\alpha(x+2h))]^{1+\frac{\beta}{2}}\\&\leqslant 12(1+\alpha)^2M_3h^2\left(\frac{n}{(x+2h)(1+\alpha(x+2h))}\right)^{\frac{2-\beta}{2}}\quad.\end{aligned}$$

此时，总有

$$I_2\leqslant12(1+\alpha)^2M_3h^2\left(\frac{n}{(x+2h)(1+\alpha(x+2h))}\right)^{\frac{2-\beta}{2}}\quad.$$

而

$$\begin{aligned}I_3&\leqslant\int_{x+h}^{x+2h}(2h-(v-x))M_3\left(\frac{n}{v(1+\alpha v)}\right)^{\frac{2-\beta}{2}}\mathrm{d}v\\&\leqslant M_3\left(\frac{n}{(x+h)(1+\alpha(x+h))}\right)^{\frac{2-\beta}{2}}\int_{x+h}^{x+2h}(2h-(v-x))\mathrm{d}v\\&\leqslant 2M_3h^2\left(\frac{n}{(x+2h)(1+\alpha(x+2h))}\right)^{\frac{2-\beta}{2}}\quad.\end{aligned}$$

于是有

$$I_2+I_3\leqslant14(1+\alpha)^2M_3h^2\left(\frac{n}{(x+2h)(1+\alpha(x+2h))}\right)^{\frac{2-\beta}{2}}$$

综上所述，总有

$$I_2+I_3\leqslant14(1+\alpha)^2M_3h^2\left\{\min\left(n^2,\frac{n}{(x+2h)(1+\alpha(x+2h))}\right)\right\}^{\frac{2-\beta}{2}}\quad.$$

从而我们有

$$\begin{aligned}|\triangle_h^2f(x)|\leqslant&16\omega_2(f,\delta_2(n,x,h))+14(1+\alpha)^2M_3h^2\\&\cdot\left\{\min\left(n^2,\frac{n}{(x+2h)(1+\alpha(x+2h))}\right)\right\}^{\frac{2-\beta}{2}}\quad.\end{aligned}$$

类似(i)必要性的证明即可得到

$$\omega_2(f,h)\leqslant M_4h^\beta\quad.$$

定理证毕。

参 考 文 献

1 Ditzian Z. Proceedings of the Amer. Math. Soc. ,1985;93(1):25－31
2 陈文忠:算子逼近论,厦门,厦门大学出版社,1989

Derivatives of Generalized Baskakov Operator and Smoothness of the Function

Sun Weibin

(Ningxia University, Yinchuan, 750021)

Abstract

This paper econsiders the eguivalent relation between derivatives of generaliyed Baskakov operator and smoothness of the function. i. e $|M_n'(f;x)| \leqslant M_1 \left\{\min\left(n^2, \frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)\right\}^{\frac{1-\beta}{2}}$ if and onty if $w_1(f,h) \leqslant M_2 h^\beta (0<\beta\leqslant 1)$, $|M_n''(f;x)| \leqslant M_3 \left\{\min\left(n^2, \frac{n}{x(1+\alpha x)}\right)\right\}^{\frac{2-\beta}{2}}$ if and only if $w_2(f,h)\leqslant M_4 h^\beta (0<\beta\leqslant 2)$.

Key words Generalized Baskakov operator, Derivative, Smoothness