DOI: 10.3969/j.issn.1003-0972.2012.01.003

图的弱罗马控制

陈越奋[1],杨 剑[2*]

(1. 信阳师范学院 数学与信息科学学院,河南 信阳 464000;
2. 河南交通职业技术学院,河南 郑州 450005)

摘 要:图的弱罗马控制数是图的弱罗马控制函数的最小权,记为 $\gamma_r(G)$. 用逻辑推理和逐步分析法,刻画了弱罗马控制数等于最小控制数加 1 的图(即 $\gamma_r(G)=\gamma(G)+1$)的特征.

关键词: 图; 控制数; 弱罗马控制数; 团

中图分类号:O157.5 文献标志码:A 文章编号:1003-0972(2012)01-0009-05

Weak Roman Domination in Graphs

CHEN Yue-fen[1], YANG Jian[2*]

(1. College of Mathematics and Information Science, Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China;
2. Henan Vocational and Technical College of Communications, Zhengzhou 450005, China)

Abstract: The weak Roman domination number of G, denoted by $\gamma_r(G)$, is the minimum weight of a weak Roman dominating function in G. The graphs $\gamma_r(G)=\gamma(G)+1$ was characterized by the devices of logicality and analysis.

Key words: graph; domination number; weak Roman domination number; clique

0 引言

近 30 多年来,随着计算机科学和网络通讯技术的飞速发展,图论研究也出现异常活跃的趋势,而控制数理论也许是其中发展最快的领域. 图的控制数理论作为图论的一个重要研究方向,在相关科学领域,例如计算机科学、通讯网络、编码理论、运筹学以及社会学等领域具有广泛的应用.

罗马控制理论首先是由 Ian Stewart[1] 提出的,而 E. J. Cockayne[2] 等给出了在一个图 $G=(V,E)$ 上的罗马控制函数(简称 RDF)的概念,在此基础上,M. A. Henning[3] 等给出了弱罗马控制函数(简称 WRDF)的概念. 如果函数 $f: V\rightarrow\{0,1,2\}$ 满足: $\forall u\in V_0$,都存在一个顶点 $v\in V_1\cup V_2$ 与之相邻,并且新函数 $f': V\mapsto\{0,1,2\}$ 不存在未防御点,其中 $f'(u)=1, f'(v)=f(v)-1$ 并且

$$f'(w)=f(w), \forall w\in V-\{u,v\},$$

则称函数 f 是一个 WRDF.

我们定义 f 的权 $w(f)$ 为 $|V_1|+2|V_2|$,图 G 的一个 WRDF 的最小权称为弱罗马控制数,记为 $\gamma_r(G)$,即 $\gamma_r(G)=\min\{w(f)\mid f$ 是图 G 的一个 WRDF$\}$. 一个权为 $\gamma_r(G)$ 的 WRDF 称为 $\gamma_r(G)$—函数.

基于下面的意图给出 WRDF 定义. 如果一个地区是不安全的(即没有军团驻扎),且与之相邻的地区也都是不安全的,则称这个地区是未防御的. 由于不安全地区是薄弱可击的,因此要求每一个不安全地区都与一个安全地区相邻,并且当这个地区遭到攻击时,从相邻地区派遣军团到此防御,不会产生未防御地区. 故每一个不安全地区同样能够进行防御. 统治者通过这种方法仍然能够保卫罗马帝国. 而这种派遣军团保卫帝国的方案恰好对应着一个 WRDF,并且最少军团数目恰好对应着 WRDF 的最小权. 这种方案既能节约军费又能保卫国家,因此弱罗马控制更加实用,统治者对此高度

收稿日期:2011-09-15;修订日期:2011-11-26; * . 通讯联系人,E-mail: yangjian4088@163.com

基金项目:国家自然科学基金项目(61143002);河南省科技厅科技计划项目(102102210242)

作者简介:陈越奋(1979-),男,河南潢川人,讲师,主要从事非线性分析和图论方面的研究;杨剑(1981-),男,河南固始人,讲师,主要从事图论方面的研究.

重视.

本文主要刻画了弱罗马控制数等于最小控制数加 1 的图(即 $\gamma_r(G)=\gamma(G)+1$)的特征.

1　记号

一般地,我们使用文献[4]中的记号和图论术语. 令 $G=(V,E)$ 是一个边集为 E,顶点集为 V 且阶数为 n 的图,$\forall v\in V$,顶点 v 的度记为 $d(v)$. 顶点 v 的开邻域记为 $N(v)=\{u\in V\mid uv\in E\}$,并且闭邻域记为 $N[v]=\{v\}\cup N(v)$. $\forall S\subseteq V$,它的开邻域记为 $N(S)=\cup_{v\in S}N(v)-S$,并且它的闭邻域记为 $N[S]=S\cup N(S)$. 对于一个顶点 u,如果 $N[U]\cap S=\{v\}$,则称它为 v 关于 S 的私有邻点,或者称为 v 的一个 $S-pn$. 顶点 v 的所有 $S-pn$ 的集合

$$pn(v,S)=N[v]-N[S-\{v\}],$$

被称为 v 关于 S 的私有邻集,集合

$$epn(v,S)=pn(v,S)-\{v\}$$

被称为 v 关于 S 的外私有邻集,故集合 $epn(v,S)\subseteq V-S$. 如果 $\forall v\in S,pn(v,S)\neq\varnothing$,则集合 S 被称为是不多余的。

设图 $G=(V,E)$,$S\subseteq V$,如果 $\forall v\in U\backslash S$ 都至少与 S 中的一顶点相邻,则我们称集合 S 控制集合 U,记为 $S>U$. 如果 $S>V-S$ 或者 $N[S]=V$,则 S 称为 G 的一个控制集. 图 G 的最小控制集中所含顶点的个数(即基数)称为最小控制数,记为 $\gamma(G)$. 基数为 $\gamma(G)$ 的控制集称为 $\gamma(G)$—集. 有关图的控制集[5]理论目前已经有了很多的结论. 特别地,T. W. Haynes[4,6]等深入研究了图的控制集理论. 在本文中,我们所研究的图均为有限的非平凡简单图.

2　相关的已知结论

为了研究问题的方便,我们把与本文有关的结论列到下面,以便后面使用.

引理 1[1]　对任何图 G,$\gamma(G)=\gamma_r(G)$ 当且仅当存在一个 $\gamma(G)$—集 S 使得:

(1) $\forall v\in S,pn(v,S)$ 导出一个团;

(2) $\forall u\in V(G)-S$ 不是任何 S 的私有邻点,存在一个点 $v\in S$,使得 $pn(v,S)\cup\{u\}$ 导出一个团.

引理 2[1]　对任何图 G,

$$\gamma(G)\leqslant\gamma_r(G)\leqslant\gamma_R(G)\leqslant 2\gamma(G).$$

引理 3[1]　对任何图 G,$\gamma(G)=\gamma_r(G)$ 当且仅当存在一个 $\gamma(G)$—集 S 使得:

(1) $\forall v\in S,pn(v,S)$ 导出一个团;

(2) $\forall u\in V(G)-S$ 不是任何 S 的私有邻点,存在一个点 $v\in S$,使得 $pn(v,S)\cup\{u\}$ 导出一个团.

3　主要结论与证明

M. A. Henning[1]等给出了弱罗马控制数与最小控制数相同的图(即 $\gamma(G)=\gamma_r(G)$)的特征(引理 3). 我们将要刻画图 G 满足 $\gamma_r(G)=\gamma(G)+1$ 的特征. 为此,先给出几个引理.

引理 4　对任意图 $G=(V,E)$,满足:

(a) 不存在 $\gamma(G)$—集 S 满足: $\forall v\in S,pn(v,S)$ 导出一个团;

(b) 存在一个 $\gamma(G)$—集 S 满足: $\exists u\in S$ 使得 $pn(u,S)$ 不能导出一个团,而 $\forall v\in S-\{u\},pn(v,S)$ 能够导出一个团,而且 $\forall w\in V-S$,若它不是 S 中任何点的私有邻点,则 w 与 u 相邻,或者 $\exists v\in S$ 使得 $vw\in E$ 且 $pn(v,S)\cup\{w\}$ 导出一个团,则

$$\gamma_r(G)=\gamma(G)+1.$$

证明　由(a),再由引理 1 和引理 2 知 $\gamma_r(G)\geqslant\gamma(G)+1$.

再由(b),令 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 使得 $V_0=V-S$,$V_1=S-\{u\}$,$V_2=\{u\}$,则显然 f 是图 G 的一个 WRDF 并且

$$f(V)=|V_1|+2|V_2|=|S|+1=\gamma(G)+1.$$

故 $\gamma_r(G)\leqslant\gamma(G)+1$. 因此 $\gamma_r(G)=\gamma(G)+1$.

引理 5　对任意图 $G=(V,E)$,满足:

(a) 不存在 $\gamma(G)$—集 S 满足: $\forall v\in S,pn(v,S)$ 导出一个团;

(b) 存在一个 $\gamma(G)$—集 S(如图 1)满足: $\exists u\in S$ 使得 $w\in epn(u,S)$ 并且 $\forall v\in S$,设 $epn(v,S)$ 导出的团记为 $K_{m_1},K_{m_2},\cdots,K_{m_n}$,都存在某个 $K_{m_i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 使得 $epn(v,S)\backslash V(K_{m_i})$ 的每一个点都与 w 相邻;另外,$\forall x\in V-S$,若它不是 S 中任何点的私有邻点,则要么它与 w 相邻,要么它与它相邻的上面选择的某个 v 的 K_{m_i} 构成团,则

$$\gamma_r(G)=\gamma(G)+1.$$

证明　由(a),再由引理 1 和引理 2 知 $\gamma_r(G)\geqslant\gamma(G)+1$.

再由(b),令 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 使得 $V_0=V-S\cup\{w\}$,$V_1=S\cup\{w\}$,$V_2=\varnothing$,则易证 f 是图 G 的一个 WRDF 并且

$$f(V)=|V_1|=|S|+1=\gamma(G)+1.$$

故 $\gamma_r(G)\leqslant\gamma(G)+1$. 因此 $\gamma_r(G)=\gamma(G)+1$.

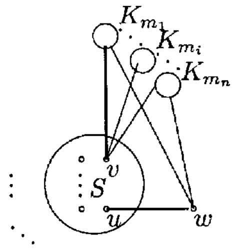

图1　有限的简单图

Fig. 1 Finite and simple graphs

引理6　对任意图 $G=(V,E)$,满足:

(a) 不存在 $\gamma(G)$—集 S 满足: $\forall u\in V-S$,若它不是 S 中任何点的私有邻点,$\exists v\in S$ 使得 $uv\in E$ 且 $pn(v,S)\cup\{u\}$ 导出一个团;

(b) 存在一个 $\gamma(G)$—集 S 满足: $\forall v\in S$, $pn(v,S)$ 导出一个团, 并且 $\exists u\in V-S$,若它不是 S 中任何点的私有邻点, 则不存在 $v\in S$,使得 $uv\in E$ 且 $pn(v,S)\cup\{u\}$ 导出一个团, 但是 $\forall w\in V-S$,$w\neq u$ 且它不是 S 中任何点的私有邻点,$\exists v\in S$ 使得 $wv\in E$ 且 $pn(v,S)\cup\{w\}$ 导出一个团,则

$$\gamma_r(G)=\gamma(G)+1.$$

证明　由(a),再由引理1和引理2知 $\gamma_r(G)\geqslant\gamma(G)+1$.

再由(b),令 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 使得

$$V_0=V-S\cup\{u\},V_1=S\cup\{u\},V_2=\varnothing,$$

则易证 f 是图 G 的一个 WRDF 并且

$$f(V)=|V_1|=|S|+1=\gamma(G)+1.$$

故 $\gamma_r(G)\leqslant\gamma(G)+1$. 因此 $\gamma_r(G)=\gamma(G)+1$.

引理7　对任意图 $G=(V,E)$,满足:

(a) 不存在 $\gamma(G)$—集 S 满足: $\forall u\in V-S$,若它不是 S 中任何点的私有邻点,$\exists v\in S$ 使得 $uv\in E$ 且 $pn(v,S)\cup\{u\}$ 导出一个团;

(b) $\exists\gamma(G)$—集 S(如图2)满足: 至少 $\exists u,v\in S$,使得 $wu,wv\in E$ 且 $w\in V-S$, 并且 $\forall x\in S$,设 $epn(x,S)$ 导出的团记为 $K_{m_1},K_{m_2},\cdots,K_{m_n}$,都存在某个 $K_{m_i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 使得 $epn(x,S)\setminus V(K_{m_i})$ 的每一个点都与 w 相邻; 另外,$\forall y\in V-S$,若它不是 S 中任何点的私有邻点,则要么它与 w 相邻,要么它与它相邻的上面选择的某个 x 的 K_{m_i} 构成团,则

$$\gamma_r(G)=\gamma(G)+1.$$

证明　由(a),再由引理1和引理2知

$$\gamma_r(G)\geqslant\gamma(G)+1.$$

再由(b),令 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 使得

$$V_0=V-S\cup\{w\},V_1=S\cup\{w\},V_2=\varnothing,$$

则易证 f 是图 G 的一个 WRDF 并且

$$f(V)=|V_1|=|S|+1=\gamma(G)+1.$$

故 $\gamma_r(G)\leqslant\gamma(G)+1$. 因此 $\gamma_r(G)=\gamma(G)+1$.

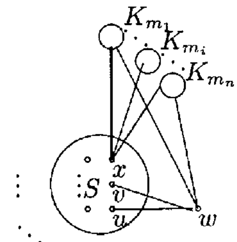

图2　有限的简单图

Fig. 2 Finite and simple graphs

引理8　对任意图 $G=(V,E)$,满足:

(a) 不存在 $\gamma(G)$—集 S 满足: $\forall u\in V-S$,若它不是 S 中任何点的私有邻点,$\exists v\in S$ 使得 $uv\in E$ 且 $pn(v,S)\cup\{u\}$ 导出一个团;

(b) 存在 $\gamma(G)$—集 S 满足: $\forall v\in S$,$pn(v,S)$ 导出一个团, 并且 $\exists u\in S$,使得 $\forall w\in V-S$,若它不是 S 中任何点的私有邻点,则要么它与 u 点相邻, 要么 $\exists v\in S$ 使得 $wv\in E$ 且 $pn(v,S)\cup\{w\}$ 导出一个团, 则

$$\gamma_r(G)=\gamma(G)+1.$$

证明　由(a),再由引理1和引理2知

$$\gamma_r(G)\geqslant\gamma(G)+1.$$

再由(b),令 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 使得

$$V_0=V-S,V_1=S-\{u\},V_2=\{u\},$$

则易证 f 是图 G 的一个 WRDF 并且

$$f(V)=|V_1|+2|V_2|=|S|+1=\gamma(G)+1.$$

故 $\gamma_r(G)\leqslant\gamma(G)+1$. 因此 $\gamma_r(G)=\gamma(G)+1$.

引理9　设 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 是图 G 的一个 $\gamma_r(G)$—函数. 设 $S=V_1\cup V_2$,则 $\forall v\in V_1$,$pn(v,S)$ 导出一个团.

证明　设 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 是图 G 的一个 $\gamma_r(G)$—函数. $\forall v\in V_1$,设 $u,w\in epn(v,S)$,则 $u,w\in V-S=V_0$. 由于 v 是 S 中唯一与 u 相邻的顶点, 因此从 v 到 u 调动一个军团不会产生未防御点,即函数 $f_u=(V_0,V_1,V_2)=(V_0\cup\{v\}\setminus\{u\},V_1\cup\{u\}\setminus\{v\},V_2)$ 没有未防御点. 但是由于 $N(w)\cap(S-\{v\})=\varnothing$,则必有 $uw\in E$.

因此 $epn(v,S)$ 导出一个团,从而 $pn(v,S)$ 导出一个团.

注意到任意一个极小控制集都是一个极大不多余集[3],但是反之不然. 例如, 显然图 C_5 中任意两个相邻的点集都构成极大不多余集,但是它却不是控制集. 因此,有下面的结论成立.

引理10　每一个非极小控制集 S 一定是多余集,即 $\exists v\in S$,使得 $pn(v,S)=\varnothing$.

定理 1 对任意图 $G=(V,E)$，$\gamma_r(G)=\gamma(G)+1$ 的充分必要条件是下面两个条件之一成立:

Case1.

(a) 不存在 $\gamma(G)$—集 S 满足: $\forall v\in S$，$pn(v,S)$ 导出一个团;

(b) 下面两个条件之一成立:

(b1) 存在一个 $\gamma(G)$—集 S 满足: $\exists u\in S$ 使得 $pn(u,S)$ 不能导出一个团，而 $\forall v\in S-\{u\}$，$pn(v,S)$ 能够导出一个团，而且 $\forall w\in V-S$，若它不是 S 中任何点的私有邻点，则 w 与 u 相邻，或者 $\exists v\in S$ 使得 $vw\in E$ 且 $pn(v,S)\cup\{w\}$ 导出一个团;

(b2) 存在一个 $\gamma(G)$—集 S(如图 1) 满足: $\exists u\in S$ 使得 $w\in epn(u,S)$ 并且 $\forall v\in S$，设 $epn(v,S)$ 导出的团记为 $K_{m_1},K_{m_2},\cdots,K_{m_n}$，都存在某个 $K_{m_i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 使得 $epn(v,S)\setminus V(K_{m_i})$ 的每一个点都与 w 相邻; 另外，$\forall x\in V-S$，若它不是 S 中任何点的私有邻点，则要么它与 w 相邻，要么它与它相邻的上面选择的某个 v 的 K_{m_i} 构成团;

Case2.

(a) 不存在 $\gamma(G)$—集 S 满足: $\forall u\in V-S$，若它不是 S 中任何点的私有邻点，$\exists v\in S$ 使得 $uv\in E$ 且 $pn(v,S)\cup\{u\}$ 导出一个团;

(b) 下面 3 个条件之一成立:

(b1) 存在一个 $\gamma(G)$—集 S 满足: $\forall v\in S$，$pn(v,S)$ 导出一个团，并且 $\exists u\in V-S$，若它不是 S 中任何点的私有邻点，则不存在 $v\in S$，使得 $uv\in E$ 且 $pn(v,S)\cup\{u\}$ 导出一个团，但是 $\forall w\in V-S$，$w\neq u$ 且它不是 S 中任何点的私有邻点，$\exists v\in S$ 使得 $wv\in E$ 且 $pn(v,S)\cup\{w\}$ 导出一个团;

(b2) $\exists\gamma(G)$—集 S 满足: 至少 $\exists u,v\in S$，使得 $wu,wv\in E$ 且 $w\in V-S$，并且 $\forall x\in S$，设 $epn(x,S)$ 导出的团记为 $K_{m_1},K_{m_2},\cdots,K_{m_n}$，都存在某个 $K_{m_i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 使得 $epn(x,S)\setminus V(K_{m_i})$ 的每一个点都与 w 相邻; 另外，$\forall y\in V-S$，若它不是 S 中任何点的私有邻点，则要么它与 w 相邻，要么它与它相邻的上面选择的某个 x 的 K_{m_i} 构成团;

(b3) 存在 $\gamma(G)$—集 S 满足: $\forall v\in S$，$pn(v,S)$ 导出一个团，并且 $\exists u\in S$，使得 $\forall w\in V-S$，若它不是 S 中任何点的私有邻点，则要么它与 u 点相邻，要么 $\exists v\in S$ 使得 $wv\in E$ 且 $pn(v,S)\cup\{w\}$ 导出一个团.

证明 ($\Leftarrow$) 由引理 4、引理 5、引理 6、引理 7、引理 8 直接推得.

($\Rightarrow$) 若 $\gamma_r(G)=\gamma(G)+1$，设 $f=(V_0,V_1,V_2)$ 是图 G 的一个 $\gamma_r(G)$—函数，则

$$f(V)=|V_1|+2|V_2|=\gamma_r(G)=\gamma(G)+1.$$

因此，f 的权分配只有下面两种方式:

(1) $|V_1|=\gamma(G)+1$ 并且 $|V_2|=0$;

(2) $|V_1|=\gamma(G)-1$ 并且 $|V_2|=1$.

事实上，任何其他的分配方式均会导致 $|V_1|+|V_2|<\gamma(G)$，矛盾.

如果(1) 成立，则 $|V_2|=0$，因此可设

$$f=(V_0,V_1,V_2)=(V-V_1,V_1,\varnothing),$$

则 $f(V)=|V_1|=\gamma_r(G)=\gamma(G)+1$. 由引理 9 知，$\forall v\in V_1$，$pn(v,V_1)$ 导出一个团.

因为 f 是 $\gamma_r(G)$—函数，则 $\forall u\in V-V_1$，若它不是 V_1 中任何点的私有邻点，$\exists v\in V_1$ 使得 $pn(v,V_1)\cup\{u\}$ 导出一个团 (事实上，设 $u\in V-V_1$，即 $u\in V_0$，且它不是 V_1 中任何点的私有邻点，则 u 必须与一个顶点 $v\in V_1$ 相邻，且调动军团从 v 到 u 时不会产生未防御点，因此 $u>pn(v,V_1)$. 故 $pn(v,V_1)\cup\{u\}$ 导出一个团.

注意到 $V_1>V-V_1$，并且

$$|V_1|=\gamma(G)+1>\gamma(G).$$

由引理 10 知存在唯一 $w\in V_1$，使得

$$pn(w,V_1)=\varnothing,$$

则下面分为 4 种情形进行讨论:

(1.1) w 与 V_1 中唯一的一点 u 相邻，还与 $V-V_1$ 中的点有边相连;

(1.2) w 与 V_1 中至少两点 u,v 相邻，还与 $V-V_1$ 中的点有边相连;

(1.3) w 与 V_1 中唯一的一点 u 相邻，而与 $V-V_1$ 中的点无边相连;

(1.4) w 与 V_1 中至少两点 u,v 相邻，而与 $V-V_1$ 中的点无边相连;

如果情形(1.1) 成立，则令 $S=V_1-\{w\}$，显然 S 是 G 的一个控制集，又 $|S|=|V_1|-1=\gamma(G)$，所以 S 是一个 $\gamma(G)$—集.

注意到 $\forall v\in V_1$，$pn(v,V_1)$ 导出一个团，记为 K_{m_i}，则 $V(K_{m_i})\subseteq pn(v,S)$. 又由于 $pn(w,V_1)=\varnothing$，设 w 与 $V-V_1$ 中相邻的点的集合记为 $\overline{N}(w)$ (由已知 $\overline{N}(w)\neq\varnothing$)，则 $\forall x\in\overline{N}(w)$，至少存在一点 $y\in V_1-\{w\}$ 使得 $x\in N(y)$. 因此

$$\forall v\in S,pn(v,S)\setminus V(K_{m_i})\subseteq\overline{N}(w),$$

即它们都与 w 相邻，又 w 只与 V_1 中 u 相邻，所以 $w\in pn(u,S)$，并且不存在一个 $\gamma(G)$—集 S 使得 $\forall v\in S$，$pn(v,S)$ 导出一个团.

又注意到$\forall y \in V - V_1$，若它不是V_1中任何点的私有邻点，$\exists x \in V_1$使得$xy \in E$且$pn(x, V_1) \cup \{y\}$导出一个团. 所以$\forall y \in V - S$，若它不是S中任何点的私有邻点，则要么它与w相邻，要么它与它相邻的某个$x \in S$的$pn(x, S)$的某个K_{m_i}构成团.

故Case1的(a)和(b2)成立，

如果情形(1.2)成立，则令$S = V_1 - \{w\}$，显然S是G的一个控制集，又$|S| = |V_1| - 1 = \gamma(G)$，所以$S$是一个$\gamma(G)$—集.

注意到$\forall v \in V_1$，$pn(v, V_1)$导出一个团，记为K_{m_i}，则$V(K_{m_i}) \subseteq pn(v, S)$. 又由于$pn(w, V_1) = \varnothing$，设$w$与$V - V_1$中相邻的点的集合记为$\overline{N}(w)$（由已知$\overline{N}(w) \neq \varnothing$），则$\forall x \in \overline{N}(w)$，至少存在一点$y \in V_1 - \{w\}$使得$x \in N(y)$.

因此$\forall v \in S$，$pn(v, S) \setminus V(K_{m_i}) \subseteq \overline{N}(w)$，即它们都与$w$相邻. 又由于$w$与$V_1$中至少两点$u$，$v$相邻，则$w$不是$S$中任何点的私有邻点，并且显然也不存在$\gamma(G)$—集$S$满足：$\forall u \in V - S$，若它不是$S$中任何点的私有邻点，$\exists v \in S$使得$uv \in E$且$pn(v, S) \cup \{u\}$导出一个团.

又注意到$\forall y \in V - V_1$，若它不是V_1中任何点的私有邻点，$\exists x \in V_1$使得$pn(x, V_1) \cup \{y\}$导出一个团. 所以$\forall y \in V - S$，若它不是S中任何点的私有邻点，则要么它与w相邻，要么它与它相邻的某个$x \in S$的$pn(x, S)$的某个K_{m_i}构成团.

故Case2的(a)和(b2)成立.

如果情形(1.3)成立，则令$S = V_1 - \{w\}$，显然S是G的一个控制集，又$|S| = |V_1| - 1 = \gamma(G)$，所以$S$是一个$\gamma(G)$—集.

注意到$\forall v \in V_1$，$pn(v, V_1)$导出一个团，又由于w与$V - V_1$中的点无边相连，所以$\forall v \in V_1 - \{w, u\} = S - \{u\}$，$pn(v, S)$导出一个团，并且$w \in epn(u, S)$，而$pn(u, S)$不能导出一个团（事实上，$w$与$epn(u, V_1)$无边相连），且显然不存在$\gamma(G)$—集$S$满足：$\forall v \in S$，$pn(v, S)$导出一个团.

又注意到$\forall y \in V - V_1$，若它不是V_1中任何点的私有邻点，$\exists x \in V_1$使得$pn(x, V_1) \cup \{y\}$导出一个团. 又w与$V - V_1$中的点无边相连，所以$\forall y \in V - S$，若它不是S中任何点的私有邻点，$\exists x \in S$使得$xy \in E$且$pn(x, S) \cup \{y\}$导出一个团.

故Case1的(a)和(b1)成立.

如果情形(1.4)成立，则令$S = V_1 - \{w\}$，显然S是G的一个控制集，又$|S| = |V_1| - 1 = \gamma(G)$，所以$S$是一个$\gamma(G)$—集.

注意到$\forall v \in V_1$，$pn(v, V_1)$导出一个团，又由于w与$V - V_1$中的点无边相连，所以$\forall v \in V_1 - \{w\} = S$，$pn(v, S)$导出一个团，又由于$w$与$V_1$中至少两点$u$，$v$相邻，所以$w$不是$S$中任何点的私有邻点，并且不存在$x \in S$使得$pn(x, S) \cup \{w\}$导出一个团. 另外，显然也不存在$\gamma(G)$—集$S$满足：$\forall u \in V - S$，若它不是任何$S$中点的私有邻点，$\exists v \in S$使得$uv \in E$且$pn(v, S) \cup \{u\}$导出一个团.

又注意到$\forall y \in V - V_1$，若它不是V_1中任何点的私有邻点，$\exists x \in V_1$使得$pn(x, V_1) \cup \{y\}$导出一个团. 又w与$V - V_1$中的点无边相连，所以$\forall y \in V - S$，$y \neq w$，若它不是S中任何点的私有邻点，$\exists x \in S$使得$xy \in E$且$pn(x, S) \cup \{y\}$导出一个团.

故Case2的(a)和(b1)成立.

若方式(2)成立，即$|V_1| = \gamma(G) - 1$并且$|V_2| = 1$，则$|V_1 \cup V_2| = |V_1| + |V_2| = \gamma(G)$，所以$V_1 \cup V_2$是一个$\gamma(G)$—集.

由引理9知，$\forall v \in V_1$，$pn(v, V_1 \cup V_2)$导出一个团，又由于f是一个$\gamma_r(G)$—函数并且$V_2 = \{w\} \neq \varnothing$，则下面分为两种情形进行讨论：

(2.1) $pn(w, V_1 \cup V_2)$导出一个团，且$\forall u \in V_0$，若它不是$V_1 \cup V_2$中任何点的私有邻点，则u要么与w相邻，要么$\exists v \in V_1 \cup V_2$使得$uv \in E$且$pn(v, V_1 \cup V_2) \cup \{u\}$导出一个团.

(2.2) $pn(w, V_1 \cup V_2)$不能导出一个团，并且$\forall u \in V_0$，若它不是$V_1 \cup V_2$中任何点的私有邻点，则u要么与w相邻，要么$\exists v \in V_1$使得$uv \in E$且$pn(v, V_1 \cup V_2) \cup \{u\}$导出一个团.

如果情形(2.1)成立，则$\exists u \in V_0$，且它不是$V_1 \cup V_2$中任何点的私有邻点，使得u只与w相邻，另外，不存在一点$v \in V_1$使得$uv \in E$且$pn(v, V_1 \cup V_2) \cup \{u\}$导出一个团（否则$f = (V_0, V_1 \cup \{w\}, \varnothing)$是$G$的一个WRDF，并且$w(f) = |V_1 \cup \{w\}| = \gamma(G)$，所以$\gamma_r(G) \leqslant \gamma(G)$，矛盾）.

因此，不存在$\gamma(G)$—集S满足：$\forall u \in V - S$，若它不是S中任何点的私有邻点，$\exists v \in S$使得$uv \in E$且$pn(v, S) \cup \{u\}$导出一个团.

故Case2的(a)和(b3)成立.

如果情形(2.2)成立，则显然不存在$\gamma(G)$—集S满足：$\forall v \in S$，$pn(v, S)$导出一个团.

故Case1的(a)，(b1)成立.

综合(1)和(2)结论得证.

（下转第30页）

Dynam Contin Discrete Impuls Systems,2000,7: 265-287.

[7] Lenci S, Rega G. *Periodic solutions and bifurcations in an impact inverted pendulum under impulsive excitation* [J]. Chaos Solitons Fractals, 2000,11: 2453-2472.

[8] Nenov S. *Impulsive controllability and optimization problems in population dynamics* [J]. Nonlinear Anal: TMA, 1999,36: 881-890.

[9] Yang X X, Shen J H. *Periodic boundary value problems for second-order impulsive integro-differential equations* [J]. Journal of Compuational and Applied Mathematics, 2007,209: 176-186.

[10] Li J L. *Periodic boundary value problems for second-order impulsive integro-differential equations* [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008,198: 317-325.

责任编辑:郭红建

(上接第 13 页)

参考文献:

[1] Stewart I. *Defend the Roman empire!* [J]. Scientific American,1999,281: 136-138.

[2] Cockayne E J, Dreyer P A, Hedetniemi S M, et al. *Roman domination in graphs* [J]. Discrete Mathematics, 2004,278: 11-22.

[3] Henning M A, Hedetniemi S T. *Defending the Roman empire—a new strategy* [J]. Discrete Mathematics, 2003,266: 239-251.

[4] Haynes T W, Hedetniemi S T, Slater P J. *Fundamentals of domination in Graphs* [M]. New York: Marcel Dekker Inc. 1998.

[5] Gunther G, Hartnell B L, Markus L, et al. *Graphs with unique minimum domination sets* [J]. Congr Numer,1994,101: 55-63.

[6] Haynes T W, Hedetniemi S T, Slater P J. *Domination in graphs: advanced topics* [M]. New York: Marcel Dekker Inc,1998.

责任编辑:郭红建