信阳师范学院学报: 自然科学版
第 26 卷 第 1 期 2013 年 1 月

Journal of Xinyang Normal University
Natural Science Edition Vol. 26 No. 1 Jan. 2013

DOI: 10.3969/j. issn. 1003-0972.2013.01.004

关于一维稳态黏性量子流体动力学模型的一个注记

董建伟*,娄光谱

(郑州航空工业管理学院 数理系, 河南 郑州 450015)

摘 要: 研究一维稳态黏性量子流体动力学等温模型,证明了当规模普朗克常数趋于零时,模型的解收敛于无量子项的黏性流体动力学模型的解. 该证明需要得到关于解的平方根的一个新的估计,此估计显然在以前的文献[4-5]中没有得到,由此给出了关于量子项的一致控制,从而可使解取极限. 此极限过程描述了从量子力学到经典牛顿力学的一个关系.

关键词: 黏性量子流体动力学模型; 稳态模型; 半古典极限

中图分类号: O175.29 **文献标志码**: A **文章编号**: 1003-0972(2013)01-0017-03

A Note on One-dimensional Stationary Viscous Quantum Hydrodynamic Model

Dong Jianwei*, Lou Guangpu

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: The isothermal, stationary, one-dimensional viscous quantum hydrodynamic model was studied. It is shown that the solution of the model converges to the one of the viscous hydrodynamic model in which the quantum term is no more present as the scaled Planck constant tends to zero. The proof requires a new estimate on the square root of the solution, apparently not available in the previous Refs. [4-5]. A uniform control on the quantum term which allows the solution to the limit was given. This limiting process describes the relations between quantum mechanics and classical Newtonian mechanics.

Key words: viscous quantum hydrodynamic model; stationary model; semiclassical limit

0 引言

在纳米半导体器件的模拟中,半导体量子模型变得越来越重要[1]. 此类模型包括宏观量子模型和微观量子模型. 宏观量子模型包括量子流体动力学模型、量子漂移-扩散模型和量子能量传输模型. 它们的优点在于可以直接描述物理可测量的动态发展,以便于模拟量子现象. 另外,在半古典极限过程中,宏观量子量(例如浓度、动量和温度)在某种意义下收敛于牛顿流体力学中相应的量[2]. 黏性量子流体动力学模型可以从 Wigner-Fokker-Planck 方程中推导出[3-4].

本文研究一维稳态黏性量子流体动力学等温模型[4]:

$$J_x = \nu n_{xx}, \tag{1}$$

$$\left(\frac{J^2}{n}\right)_x + Tn_x - nV_x - \frac{\varepsilon^2}{6}n\left(\frac{(\sqrt{h})_{xx}}{\sqrt{n}}\right)_x = -\frac{J}{\tau} + vJ_{xx}, \tag{2}$$

$$\lambda^2 V_{xx} = n - C(x) \quad \text{in } (0,1), \tag{3}$$

这里: 电子浓度 n、电流密度 J 和静电场位势 V 是未知量; $C(x)$ 表示带电粒子杂质; 温度 $T>0$ 是常数; 物理参数 $\varepsilon,\nu,\lambda>0$ 分别为规模普朗克常数、黏性常数和规模德拜长度; $\tau>0$ 表示动量松弛时间. 文献[5]在下列边界条件下对模型(1)-(3)进行了研究:

$$n(0) = n(1) = 1, n_x(0) = n_x(1) = 0,$$
$$V(0) = V_0, J(0) = J_0,$$
$$V_0 = -\left(2\nu^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)(\sqrt{n})_{xx}(0) + \frac{J_0^2}{2}.$$

对于较小的电流密度得到了解的存在性和唯一性. 后来, Ansgar Jungel 和 Josipa Pina Milisic[4] 去掉了电流密度充分小这一条件,把解的存在性结果推广到了下列边界条件情形:

$$n(0) = n(1) = 1,$$

收稿日期: 2012-07-10; 修订日期: 2012-10-20; *. 通信联系人, E-mail: dongjianweiccm@163.com
基金项目: 河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目(2006110016); 河南省教育厅科学技术研究重点项目(12A110024)
作者简介: 董建伟(1980-),男,山东菏泽人,讲师,硕士,主要从事偏微分方程的研究.

$$n_x(0)=n_x(1),\ n_{xx}(0)=n_{xx}(1), \tag{4}$$

$$V(0)=0,\ V(1)=U. \tag{5}$$

但在文献[4]和[5]中没有得到解的半古典极限结果,本文我们给出这样一个结果.

众所周知,研究半导体量子模型的半古典极限是非常重要的. 在半导体器件的模拟中,器件的尺寸非常小,这使得规模参数 ε 非常小. 一般地,参数 ε 可表示为[4]:

$$\varepsilon^2=\frac{\mathrm{h}^2}{\mathrm{k_B}T_0 mL^2},$$

这里的物理参数分别为约化普朗克常数 h、波兹曼常数 $\mathrm{k_B}$、周围介质温度 T_0、电子质量 m 和特征器件长度 L. 因此研究当 ε 趋于零时黏性量子流体动力学模型宏观量的渐近逼近是十分重要的.

近来,对瞬态黏性量子流体动力学模型的研究成为一个热点[6-11].

1 一致估计

首先给出下列估计:

引理 1[4] 设 $(n_\varepsilon,J_\varepsilon,V_\varepsilon)\in H^4(0,1)\times H^3(0,1)\times H^2(0,1)$ 是当 $\varepsilon>0$ 时问题(1)-(5)的一个解,使得在 $(0,1)$ 中 $n_\varepsilon>0$,那么存在 $c>0$ 使得

$$\int_0^1\Big(\frac{(J_{\varepsilon x}n_\varepsilon-J_\varepsilon n_{\varepsilon x})^2}{n_\varepsilon^3}+\frac{\varepsilon^2}{3}(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}^2+\frac{\varepsilon^2}{144}\frac{n_{\varepsilon x}^4}{n_\varepsilon^3}\Big)\mathrm{d}x+\int_0^1\Big(\frac{n_\varepsilon^2}{4\lambda^2}+4\big(T+\frac{\nu}{\tau}\big)(\sqrt{n_\varepsilon})_x^2+\frac{J_0^2}{\nu\tau n_\varepsilon}\Big)\mathrm{d}x\leqslant c\nu^{-2}, \tag{6}$$

这里 c 与 ε 无关.

由引理 1 可以看出 $\int_0^1(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}^2\mathrm{d}x$ 的估计依赖于 ε. 下面将得到 $\int_0^1(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}^2\mathrm{d}x$ 与 ε 无关的一致估计. 若设 $J_\varepsilon=n_\varepsilon u_\varepsilon$,这里 u_ε 表示电子速度,则(6)式中的第一个积分可以写成 $\int_0^1 n_\varepsilon u_{\varepsilon x}^2\mathrm{d}x$(见文献[4]),因此

$$\int_0^1 n_\varepsilon u_{\varepsilon x}^2\mathrm{d}x\leqslant c\nu^{-2}, \tag{7}$$

这里 $c>0$ 与 ε 无关. 由(7)式,可以得到如下一致估计:

引理 2 设 $(n_\varepsilon,J_\varepsilon,V_\varepsilon)\in H^4(0,1)\times H^3(0,1)\times H^2(0,1)$ 是问题(1)-(5)的一个解,则存在一个常数 $c>0$,使得

$$\int_0^1(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}^2\mathrm{d}x+\frac{1}{48}\int_0^1\frac{n_{\varepsilon x}^4}{n_\varepsilon^3}\mathrm{d}x\leqslant c\nu^{-4}, \tag{8}$$

这里 c 与 ε 无关.

证明 用 $\frac{(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}}{\sqrt{n_\varepsilon}}$ 作为式(1)的试验函数,得

$$\int_0^1 J_{\varepsilon x}\frac{(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}}{\sqrt{n_\varepsilon}}\mathrm{d}x=\nu\int_0^1\frac{(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}}{\sqrt{n_\varepsilon}}n_{\varepsilon xx}\mathrm{d}x. \tag{9}$$

利用分部积分和 Young 不等式,得

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 J_{\varepsilon x}\frac{(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}}{\sqrt{n_\varepsilon}}\mathrm{d}x=\\
&\int_0^1(n_\varepsilon u_{\varepsilon x}+n_{\varepsilon x}u_\varepsilon)\frac{(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}}{\sqrt{n_\varepsilon}}\mathrm{d}x=\\
&\int_0^1\sqrt{n_\varepsilon}u_{\varepsilon x}(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}\mathrm{d}x+\\
&\int_0^1 2(\sqrt{n_\varepsilon})_x u_\varepsilon(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}\mathrm{d}x=\\
&\int_0^1\sqrt{n_\varepsilon}u_{xx}(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}\mathrm{d}x-\int_0^1 u_{\varepsilon x}(\sqrt{n_\varepsilon})_x^2\mathrm{d}x=\\
&\int_0^1\sqrt{n_\varepsilon}u_{\varepsilon x}(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}\mathrm{d}x-\\
&\frac{1}{4}\int_0^1(\sqrt{n_\varepsilon}u_{\varepsilon x})\cdot\frac{n_{\varepsilon x}^2}{n_\varepsilon\sqrt{n_\varepsilon}}\mathrm{d}x\leqslant\\
&\nu\int_0^1(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}^2\mathrm{d}x+\frac{1}{\nu}\int_0^1 n_\varepsilon u_{\varepsilon x}^2\mathrm{d}x+\\
&\frac{\nu}{48}\int_0^1\frac{n_{\varepsilon x}^4}{n_\varepsilon^3}\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{10}$$

因为

$$\frac{(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}}{\sqrt{n_\varepsilon}}n_{\varepsilon xx}=\frac{2(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}(\sqrt{n_\varepsilon})_x^2}{\sqrt{n_\varepsilon}}+2(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}^2,$$

$$\int_0^1\frac{2(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}(\sqrt{n_\varepsilon})_x^2}{\sqrt{n_\varepsilon}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{((\sqrt{n_\varepsilon})_x^3)_x}{\sqrt{n_\varepsilon}}\mathrm{d}x=$$

$$-\frac{2}{3}\int_0^1(\sqrt{n_\varepsilon})_x^3\Big(\frac{1}{\sqrt{n_\varepsilon}}\Big)_x\mathrm{d}x=\frac{1}{24}\int_0^1\frac{n_{\varepsilon x}^4}{n_\varepsilon^3}\mathrm{d}x,$$

所以

$$\nu\int_0^1\frac{(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}}{\sqrt{n_\varepsilon}}n_{\varepsilon xx}\mathrm{d}x=2\nu\int_0^1(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}^2\mathrm{d}x+\frac{\nu}{24}\int_0^1\frac{n_{\varepsilon x}^4}{n_\varepsilon^3}\mathrm{d}x. \tag{11}$$

由(9)-(11)式和(7)式,得

$$\nu\int_0^1(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}^2\mathrm{d}x+\frac{\nu}{48}\int_0^1\frac{n_{\varepsilon x}^4}{n_\varepsilon^3}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\nu}\int_0^1 n_\varepsilon u_{\varepsilon x}^2\mathrm{d}x\leqslant c\nu^{-3},$$

从而式(8) 成立. 证毕.

注 1　需要强调指出的是,估计解的平方根的这种方法也适用于一维瞬态黏性量子流体动力学模型[11]和多维瞬态黏性量子欧拉模型[12].

2　半古典极限

定理 1　设 $C(x) \in L^2(0,1)$, $U \in \mathbf{R}$, $(n_\varepsilon, J_\varepsilon, V_\varepsilon)$ 是当 $\varepsilon > 0$ 时问题(1)-(5)的一个解(解的存在性在文献[4]中已经得到了证明),则当 $\varepsilon \to 0$ 时,

$$n_\varepsilon \to n \quad \text{weakly in } H^2(0,1), \tag{12}$$

$$V_\varepsilon \to V \quad \text{weakly in } H^2(0,1), \tag{13}$$

$$J_\varepsilon \to J \quad \text{weakly in } H^1(0,), \tag{14}$$

且(n,J,V)是下列问题的一个解

$$J_x = vn_{xx},$$

$$\left(\frac{J^2}{n}\right)_x + Tn_x - nV_x = -\frac{J}{\tau} + \nu J_{xx},$$

$$\lambda^2 V_{xx} = n - C(x) \quad \text{in} \quad (0,1),$$

$$n(0) = n(1) = 1, n_x(0) = n_x(1),$$

$$n_{xx}(0) = n_{xx}(1),$$

$$V(0) = 0, V(1) = U.$$

证明　由引理 1 和引理 2,可以得到一致估计

$$\| \sqrt{n_\varepsilon} \|_{H^2(0,1)} \leqslant c,$$

这里 $c > 0$ 与 ε 无关. 利用

$$n'_{\varepsilon x} = 2\sqrt{n_\varepsilon}(\sqrt{n_\varepsilon})_x,$$

$$n_{\varepsilon xx} = 2(\sqrt{n_\varepsilon})_x^2 + 2\sqrt{n_\varepsilon}(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}$$

和嵌入 $H^2(0,1) \subset W^{1,\infty}(0,1)$, $H^2(0,1) \subset L^\infty(0,1)$,有 $\| n_\varepsilon \|_{H^2(0,1)} \leqslant c$,所以式(12)成立. 再由式(1)和(3)可以推出式(13)和(14)成立.

由 $\| \sqrt{n_\varepsilon} \|_{H^2(0,1)}$ 的一致估计,可以得到 n_ε 的一致正的下界[4]. 因为

$$n_\varepsilon\left(\frac{(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}}{\sqrt{n_\varepsilon}}\right)_x = [\sqrt{n_\varepsilon}(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}]_x - [(\sqrt{n_\varepsilon})_x^2]_x,$$

所以对任何试验函数 $\phi \in L^2(0,1)$ 和 $\varphi \in H_0^1(0,1)$,有

$$\int_0^1 J_{\varepsilon x}\phi \mathrm{d}x = \nu\int_0^1 n_{\varepsilon xx}\phi \mathrm{d}x,$$

$$-\int_0^1 \frac{J_\varepsilon^2}{n_\varepsilon}\varphi_x \mathrm{d}x - T\int_0^1 n_\varepsilon\varphi_x \mathrm{d}x - \int_0^1 n_{\varepsilon x}V_{\varepsilon x}\varphi \mathrm{d}x + \frac{\varepsilon^2}{6}\int_0^1 \sqrt{n_\varepsilon}(\sqrt{n_\varepsilon})_{xx}\varphi_x \mathrm{d}x - \frac{\varepsilon^2}{6}\int_0^1 (\sqrt{n_\varepsilon})_x^2\varphi_x \mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{J_\varepsilon}{\tau}\varphi \mathrm{d}x - v\int_0^1 J_{\varepsilon x}\varphi_x \mathrm{d}x,$$

$$\lambda^2\int_0^1 V_{\varepsilon xx}\phi \mathrm{d}x = \int_0^1 (n_\varepsilon - C(x))\phi \mathrm{d}x.$$

再由(12)-(14)式知,当 $\varepsilon \to 0$ 时,有

$$\int_0^1 J_x\phi \mathrm{d}x = v\int_0^1 n_{xx}\phi \mathrm{d}x,$$

$$-\int_0^1 \frac{J^2}{n}\varphi_x \mathrm{d}x - T\int_0^1 n\varphi_x \mathrm{d}x - \int_0^1 n_x V_x\varphi \mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{J}{\tau}\varphi \mathrm{d}x - \nu\int_0^1 J_x\varphi_x \mathrm{d}x,$$

$$\lambda^2\int_0^1 V_{xx}\phi \mathrm{d}x = \int_0^1 (n - C(x))\phi \mathrm{d}x.$$

定理 1 证毕.

3　结束语

本文研究了一维稳态黏性量子流体动力学等温模型解的半古典极限,在前人研究工作的基础上得到了关于模型解的平方根的一个新估计,从而证明了当规模普朗克常数趋于 0 时,其模型的解收敛于经典黏性流体动力学模型的解.

参考文献:

[1] Jungel A. *Nonlinear problems in quantum semiconductor modeling* [J]. Nonlinear Analysis, 2001, 47: 5873-5884.

[2] Hsiao L, Li H L. *The well-posedness and asymptotics of multi-dimensional quantum Hydrodynamics* [J]. Acta Mathematica Scientia, 2009, 29B(3): 552-568.

[3] Gardner C. *The quantum hydrodynamic model for semiconductor devices* [J]. SIAM J Appl Math, 1994, 54: 409-427.

[4] Jungel A, Milisic J P. *Physical and numerical viscosity for quantum hydrodynamics* [J]. Communications in Mathematical Sciences, 2007, 5(2): 447-471.

[5] Gualdani M, Jungel A. *Analysis of the viscous quantum hydrodynamic equations for semiconductors* [J]. European Journal of Applied Mathematics, 2004, 15: 577-595.

[6] Gualdani M, Jungel A, Toscani G. *Exponential decay in time of solutions of the viscous quantum hydrodynamic equations* [J]. Applied Mathematics Letters, 2003, 16(8): 1273-1278.

(下转第 48 页)

[3] Vanhelmont F W M, Johnson R C, Hupp J T. *An inorganic application of transient direct current photoconductivity: Corroboration of a charge - transfer aAssignment for the luminescing states of* Pt(*dpphen*)(*ecda*)*s* [J]. Inorg Chem, 2000, 39: 1814-1816.

[4] Ashraful I, Hideki S, Kohjiro H, et al. *New platinum*(Ⅱ) *polypyridyl photosensitizers for* TiO_2 *solar cells* [J]. New J Chem, 2000, 24: 343-345.

[5] Yuan C Q, Peng Z H, Pan Q C, et al. *Spectroscopic and theoretical studies on copper*(Ⅱ) *complex of maleonitriledithiolate and 5-nitro-1,10-phenanthroline* [J]. J Mol Struct, 2006, 789: 52.

[6] 潘庆才, 闫凤美, 沈红旗, 等. 超细粉体二硫纶·硝基菲咯啉铜(Ⅱ)配合物的光敏性研究[J]. 化学研究与应用, 2007, 19(3): 284-287.

[7] 潘庆才, 赵永和, 沈红旗, 等. [M(SS)(NN)]($M = Zn^{2+}, Cd^{2+}$)配合物分子内跃迁与结构的关系[J]. 光谱学与光谱分析, 2008, 28(1): 130.

责任编辑: 张建合

(上接第19页)

[7] Chen L, Dreher M. *The viscous model of quantum hydrodynamics in several dimensions* [J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2007, 17(7): 1065-1093.

[8] Dreher M. *The transient equations of viscous quantum hydrodynamics* [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2008, 31: 391-414.

[9] Liang B, Zheng S. *Exponential decay to a quantum hydrodynamic model for semiconductors* [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2008, 9(2): 326-337.

[10] Gamba I M, Jungel A, Vasseur A. *Global existence of solutions to one-dimensional viscous quantum hydrodynamic equations* [J]. Journal of Differential Equations, 2009, 247: 3117-3135.

[11] Dong J W, Lou G P. *Semiclassical limit for one-dimensional viscous quantum hydrodynamic model* [C]//The Proceedings of 2010 International Conference on Application of Mathematics and Physics, Nanjing, 2010: 109-112.

[12] Dong J W. *A note on barotropic compressible quantum Navier-Stokes equations* [J]. Nonlinear Analysis, 2010, 73: 854-856.

责任编辑: 郭红建