



基于Green函数法的受冲刷作用单桩横向动力学特性分析

马建军, 韩书娟, 高笑娟, 李达, 郭颖

引用本文:

马建军, 韩书娟, 高笑娟, 李达, 郭颖. 基于Green函数法的受冲刷作用单桩横向动力学特性分析[J]. 信阳师范学院学报自然科学版, 2023, 36(4): 663–670. doi: 10.3969/j.issn.1003–0972.2023.04.024

MA Jianjun, HAN Shujuan, GAO Xiaojuan, LI Da, GUO Ying. Analysis of Lateral Dynamic Characteristics of The Single Pile Affected By Scour By Means of Green's Functions[J]. *Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition)*, 2023, 36(4): 663–670. doi: 10.3969/j.issn.1003–0972.2023.04.024

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003–0972.2023.04.024>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

部分外露悬浮管桩水平动力阻抗分析

Analysis of Horizontal Dynamic Impedance of Partially Exposed Floating Pipe Pile

信阳师范学院学报自然科学版, 2021, 34(4): 680–685. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003–0972.2021.04.029>

分数导数黏弹性模型描述的土中单管桩的水平振动

Studies on Horizontal Vibration of Single Pile in Fractional Derivative Viscoelastic Soil

信阳师范学院学报自然科学版, 2019, 32(4): 689–696. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003–0972.2019.04.031>

部分外露摩擦管桩的扭转振动研究

Studies on the Torsional Vibration of Partially Exposed Friction Pipe Pile

信阳师范学院学报自然科学版, 2021, 34(3): 489–494. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003–0972.2021.03.025>

基于动力相互作用因子的饱和土中群管桩的纵向振动研究

Study on Longitudinal Vibration of Pipe Pile Groups in Saturated Soil Based on Dynamic Interaction Factor

信阳师范学院学报自然科学版, 2017, 30(4): 651–657. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003–0972.2017.04.030>

基于多孔介质理论的径向非均质饱和土中管桩的扭转振动

Torsional Vibration of a Single Pipe Pile in Radial Heterogeneous Saturated Soil Based on Theory of Porous Medium

信阳师范学院学报自然科学版, 2018, 31(2): 312–317. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003–0972.2018.02.027>

基于 Green 函数法的受冲刷作用单桩横向动力学特性分析

马建军^{1,2*}, 韩书娟¹, 高笑娟², 李 达¹, 郭 颖²

(1. 河南科技大学 土木工程学院, 河南 洛阳 471023; 2. 河南省建筑安全与防护工程技术研究中心, 河南 洛阳 471023)

摘 要:基于横向受荷部分埋置单桩的动力学模型,利用有限差分法实现对土-结构相互作用系统的准确建模,从而获得受冲刷作用单桩更为准确的固有频率;运用 Green 函数法求解桩基受迫振动的解析解,揭示冲刷作用下单桩横向动力学特性的变化。通过数值计算和参数分析,研究了土体特性、桩身长细比等对受冲刷作用单桩横向动力学特性的影响。结果表明:随冲刷程度加剧,桩基的各阶频率均显著降低。桩基的第一阶频率随桩身长细比增大而减小,而高阶频率的变化规律则较复杂;桩基的各阶频率均随土体弹性模量的增大而增大;若土体弹性模量增大了 1 倍(4 倍),桩基的第一阶频率约增大了 20%(40%)。

关键词:部分埋置单桩;冲刷作用;有限差分法;Green 函数法;固有频率

中图分类号:TU473;O322 文献标识码:A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Analysis of Lateral Dynamic Characteristics of The Single Pile Affected By Scour By Means of Green's Functions

MA Jianjun^{1,2*}, HAN Shujuan¹, GAO Xiaojuan², LI Da¹, GUO Ying²

(1. School of Civil Engineering, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471023, China;
2. Engineering Technology Research Center of Safety and Protection of Buildings of Henan Province, Luoyang 471023, China)

Abstract:Based on the dynamic model of the laterally loaded partially-embedded single pile, the finite difference method is used to achieve accurate modeling of the soil-structure interaction (SSI) system, and to solve the natural frequencies of the single pile affected by scour. Then Green's function is used to solve the analytical solutions of forced vibration of the single pile and reveal the changes in lateral dynamic characteristics of the single pile under scour. Through numerical calculation and parameter analysis, the effect of the soil's characteristics and pile's slenderness on the lateral dynamic characteristics of the single pile affected by scour are studied. As the scour degree intensifies, the frequencies of each order of the pile foundation are significantly reduced. The first-order frequency of the pile foundation decreases with the increase of the slenderness of the pile, and the variation law of the higher-order frequencies is complex. The frequencies of each order of pile foundation increase with the increase of elastic modulus of soils. If the elastic modulus of soils increases by one time (or four times), the first-order frequency of pile foundation increases by about 20% (or 40%).

Key words:partially-embedded single pile; scour effect; finite difference method; Green's function; natural frequency

0 引言

桩基础作为一种经济有效的深基础形式,目前已广泛应用于工业建筑和民用住宅中^[1]。已有研究表明,冲刷是导致桩基失效的重要原因,冲刷导致基床被移除,地基对桩基地支承和约束效应降低,可能导致上部结构坍塌^[2]。LIN 等^[3]提出一种

简化方法评估了冲刷孔尺寸对砂土中横向受荷桩响应的影响;ZHANG 等^[4]研究了应力历史、冲刷深度、冲刷宽度和冲刷孔坡角对软黏土中横向受荷桩响应的影响。

为满足桩基的水平承载需求,横向受荷桩的动力学研究已成为一个热点问题^[5]。国内外学者对水平荷载下单桩的动力学特性进行了广泛研究,其

理论模型可归为 3 类:连续介质理论、有限元或边界元和 Winkler 地基梁模型。利用连续介质模型,POULOS^[6]分析了黏土中桩基在准静态循环荷载作用下的挠度,MILLÁN 等^[7]研究了简谐激励作用下桩基支撑结构的动力响应。基于动力 Winkler 模型(BDWF),胡安峰等^[8]得到了黏弹性地基中单桩动力响应的解析解。

对于复杂场地中的桩基,可采用多种方法研究其动力学特性,其中尤以数值方法最简便^[9-10]。有限差分法的数学概念直观,便于编程,常用于弹性细长结构的数值模拟。利用有限差分方法,ANSARI 等^[11]求得 Euler-Bernoulli 梁的固有频率,BAO 等^[12]评估了土-结构相互作用对部分埋置单桩固有频率的影响。Green 函数法的概念清晰,可得到系统动力响应的精确解,对于确定桩基的动态响应尤为重要。利用 Green 函数法,ABU-HILAL^[13]求得 Euler-Bernoulli 梁的稳态解,LIANG 等^[14]分析了高承台桩基的动力阻抗和冲刷的影响。显然,将有限差分法和 Green 函数法相结合来分析桩基的固有频率和动力响应,将促进受冲刷作用部分埋置单桩动力学问题的求解。

基于横向受荷部分埋置单桩的动力学模型,本文利用有限差分法得到包含单桩控制方程的数值框架,冲刷过程中通过控制单元类型及数量实现对土-结构相互作用系统的准确建模,从而获得单桩更为准确的固有频率,分析冲刷作用对其横向动力学特性的影响;进而利用 Green 函数法,求得部分埋置单桩受迫振动的解析解,研究土体弹性模量、桩身长细比等对其横向动力响应的影响。

1 控制方程及其有限差分解

1.1 动力学模型

图 1 为部分埋置单桩建模分析的示意图。如图 1 所示,建立坐标系 $O-xyz$,原点 O 位于未变形桩顶, x 坐标沿横向向激励方向设置, z 坐标沿桩的轴线设置。为简便表述,基于以下假设:桩是细长、垂直和线弹性的;土场是均质、各向同性和线弹性材料;桩-土间的界面无滑移或脱离现象;忽略桩身在外激励方向之外的位移。

根据单桩的埋置特征,忽略所有非线性高阶、阻尼和外荷载项,其运动控制方程为^[12]:

$$EI\ddot{v}^{(4)}+\rho A\ddot{v}=0,0\leq z\leq l_1, \tag{1}$$

$$EIu^{(4)}+k_0u-k_1u''+\rho A\ddot{u}=0,l_1<z\leq l+l_1, \tag{2}$$

式中: l_1 为桩基非埋置段长度,单位 m; l 为桩基埋

置段长度,单位 m; L 为桩长,单位 m(且 $L=l_1+l$); v 和 u 分别为非埋置段和埋置段桩基的横向位移,单位 m; $\ddot{v}$ 、 $\ddot{u}$ 和 $v^{(4)}$ 、 $u^{(4)}$ 、 u'' 分别表示横向位移对时间 t 和埋深 z 的各阶导数; EI 为桩基的抗弯刚度,单位 $\text{kN}\cdot\text{m}^2$; ρA 为桩基截面单位长度质量,单位 kg/m ; k_0 为 Winkler 地基系数,单位 N/m^2 ; k_1 为弹性地基剪切参数,单位 N/m^2 。

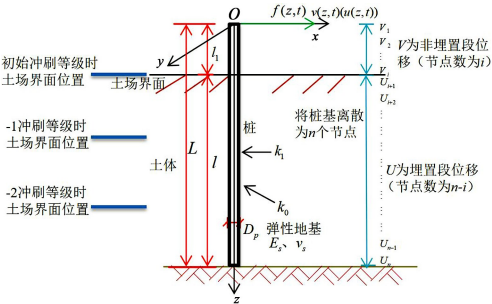


图 1 横向受荷部分埋置单桩示意图

Fig. 1 Sketch map of the laterally loaded partially-embedded single pile

1.2 有限差分解

设式(1)和式(2)的通解为复数形式的 $y(z,t)$ 和 $w(z,t)$,忽略外激励作用和阻尼,则取 $v(z,t)=\text{Re}\{y(z,t)\}$, $u(z,t)=\text{Re}\{w(z,t)\}$ ^[13]。设式(1)和式(2)的通解分别为 $v=Vie^{i\omega_i t}$ 和 $u=Ue^{i\omega_i t}$,其中 ω_i 是桩基的第 i 阶频率, U 和 V 分别为埋置段和非埋置段桩基的模式构型函数,将其代入式(1)和(2),可得

$$V^{(4)}+\omega_i^2(\frac{-\rho A}{EI}V)=0,0\leq z\leq l_1, \tag{3}$$

$$U^{(4)}-\frac{k_1}{EI}U''+\frac{k_0}{EI}U+\omega_i^2(\frac{-\rho A}{EI}U)=0, \tag{4}$$
$$l_1<z\leq l+l_1.$$

以嵌岩桩为例,其边界条件为:

$$\begin{cases} V''(0)=0, V'''(0)=0, \\ V(l_1)=U(l_1), V'(l_1)=U'(l_1), \\ V''(l_1)=U''(l_1), V'''(l_1)=U'''(l_1), \\ U(L)=0, U'(L)=0. \end{cases} \tag{5}$$

离散式(3)和式(4),可得

$$\delta_z^4 V_i+\omega^2(\frac{-\rho A}{EI}V_i)=0,0\leq z\leq l_1, \tag{6}$$

$$\delta_z^4 U_i-\frac{k_1}{EI}\delta_z^2 U_i+\frac{k_0}{EI}U_i+\omega^2(\frac{-\rho A}{EI}U_i)=0, \tag{7}$$
$$l_1<z\leq l+l_1,$$

式中: δ_z 为用泰勒级数展开的模式构型的离散表达^[15]。

进而, U 的二阶和四阶导数可表述为

$$U^{(4)} \approx \frac{U_{i-2} - 4U_{i-1} + 6U_i - 4U_{i+1} + U_{i+2}}{\Delta z^4},$$

$$U'' \approx \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{\Delta z^2}. \quad (8)$$

考虑虚节点 U_{n+1} 、 U_{n+2} , 由式(5)可得^[11], 当 $z=l$ 时 $U_{n+1}=0$,

$$U'_{n+1} = (-3U_{n+2} - 10U_{n+1} + 18U_n - 6U_{n-1} + U_{n-2}) / (12\Delta z) = 0. \quad (9)$$

将式(8)和式(9)代入式(4), 可得

$$(\mathbf{J}_B + \omega^2 \mathbf{J}_D) \mathbf{U}_n = 0, \quad (10)$$

式中:

$$\mathbf{J}_B = \begin{bmatrix} B & N & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ N & B & N & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & N & B & N & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & N & B & N \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 & N-2 & B+6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_D = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & D \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_n = [U_{i+1} \cdots U_n]^T,$$

$$B = 6 + k_0 \Delta z^4 / (EI) + 2k_1 \Delta z^2 / (EI),$$

$$N = -4 - k_1 \Delta z^2 / (EI),$$

i 为非埋置段节点数, n 为桩基总节点数。式(10)等价于式(6)。

同时, 由边界条件(5)可得, 当 $z=0$ 时,

$$V_1'' = \frac{V_0 - 2V_1 + V_2}{\Delta z^2} = 0,$$

$$V_1''' = \frac{V_2 - 3V_1 + 3V_0 - V_{-1}}{\Delta z^3} = 0, \quad (11)$$

进而,

$$\mathbf{J}_1 + \omega^2 \mathbf{J}_D \mathbf{V}_i = 0, \quad (12)$$

式中:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & -4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_i = [V_1 \ V_2 \ \cdots \ V_i]^T, D = -m \Delta z^4 / (EI).$$

利用式(5)中的连续性条件, 可得整个系统的对角矩阵

$$(\mathbf{E} + \omega^2 \mathbf{F}) \mathbf{X} = 0, \quad (13)$$

式中: $\mathbf{X} = [V_1 \ \cdots \ V_i \ U_{i+1} \ \cdots \ U_n]^T$,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_B & \\ & \mathbf{J}_D \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \text{diag}(D \ D \ \cdots \ D).$$

令式(13)中 $\mathbf{E} + \omega^2 \mathbf{F}$ 的行列式为零, 可得部分埋置单桩的各阶频率。

2 受迫振动的 Green 函数解

2.1 埋置段桩基

假设在 z_0 处作用有简谐横向荷载

$$f(z, t) = \delta(z - z_0) F_0 e^{i\Omega t}, \quad (14)$$

式中: F_0 和 Ω 为外激励的幅值和频率, $\delta(\cdot)$ 是狄拉克函数。此时, 式(2)中横向位移的解可设为

$$U(z, t) = U(z) e^{i\Omega t}. \quad (15)$$

将式(14)和(15)代入式(2), 得到

$$U^{(4)} + a_1 U'' + a_2 U = b F_0 \delta(z - z_0), \quad (16)$$

式中:

$$a_1 = -\frac{k_1}{EI}, a_2 = \frac{k_0 - \rho A \Omega^2}{EI}, b = \frac{1}{EI}.$$

利用 Green 函数法, 式(16)的解为

$$U(z) = \int_0^L f(z_0) G(z; z_0) dz_0, \quad (17)$$

式中: $f(z_0)$ 是外激励作用函数, $G(z; z_0)$ 是待求的 Green 函数, 且其为下式的解:

$$U^{(4)} + a_1 U'' + a_2 U = b \delta(z - z_0). \quad (18)$$

由式(18)可知, $G(z; z_0) = U(z; z_0)$ 。对式(18)中的变量 z 施行 Laplace 变换, 可得

$$\hat{U}(s; z_0) = \frac{1}{s^4 + a_1 s^2 + a_2} (b_1 e^{-sz_0} + (s^3 + a_1 s) U(0) + (s^2 + a_1) U'(0) + s U''(0) + U'''(0)), \quad (19)$$

式中: $s = \sigma + i\tau$, $U(0)$ 、 $U'(0)$ 、 $U''(0)$ 、 $U'''(0)$ 均为待定常数。为得到 $\hat{U}(s; z_0)$ 的逆变换, 可设

$$s^4 + a_1 s^2 + a_2 = \prod_{i=1}^4 (s - s_i),$$

并记

$$s_L = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4),$$

$$s_G = s^4 + a_1 s^2 + a_2.$$

利用文献[16], 可得如下逆变换结果:

$$L^{-1} \left(\frac{b_1 e^{-sz_0}}{s_L} \right) = H(z - z_0) (A_1 (z - z_0) b_1 +$$

$$\begin{aligned} & A_2(z-z_0)b_1 + A_3(z-z_0)b_1 + \\ & A_4(z-z_0)b_1), \end{aligned} \quad (20-a)$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left(\frac{s^3+a_1s}{s_L}\right) &= A_1(z)(s_1^3+a_1s_1) + \\ & A_2(z)(s_2^3+a_1s_2) + A_3(z)(s_3^3+a_1s_3) + \\ & A_4(z)(s_4^3+a_1s_4), \end{aligned} \quad (20-b)$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left(\frac{s^2+a_1}{s_L}\right) &= A_1(z)(s_1^2+a_1) + \\ & A_2(z)(s_2^2+a_1) + A_3(z)(s_3^2+a_1) + \\ & A_4(z)(s_4^2+a_1), \end{aligned} \quad (20-c)$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left(\frac{s}{s_L}\right) &= A_1(z)s_1 + A_2(z)s_2 + \\ & A_3(z)s_3 + A_4(z)s_4, \end{aligned} \quad (20-d)$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left(\frac{1}{s_L}\right) &= A_1(z) + A_2(z) + \\ & A_3(z) + A_4(z), \end{aligned} \quad (20-e)$$

式中: $H(\cdot)$ 为单位阶跃函数, $A_i(z)$ ($i=1, 2, 3, 4$) 为

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \frac{e^{s_1z}}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)(s_1-s_4)}, \\ A_2(z) &= \frac{e^{s_2z}}{(s_2-s_1)(s_2-s_3)(s_2-s_4)}, \\ A_3(z) &= \frac{e^{s_3z}}{(s_3-s_1)(s_3-s_2)(s_3-s_4)}, \\ A_4(z) &= \frac{e^{s_4z}}{(s_4-s_1)(s_4-s_2)(s_4-s_3)}. \end{aligned} \quad (21)$$

由式(19)可知,

$$\begin{aligned} G(z; z_0) &= L^{-1}\left(\frac{b_1}{s_G} e^{-sz_0}\right) + \\ & L^{-1}\left(\frac{s^3+a_1s}{s_G}\right)U(0) + L^{-1}\left(\frac{s^2+a_1}{s_G}\right)U'(0) + \\ & L^{-1}\left(\frac{s}{s_G}\right)U''(0) + L^{-1}\left(\frac{1}{s_G}\right)U'''(0). \end{aligned} \quad (22)$$

将式(21)代入式(22)可得,

$$\begin{aligned} G(z; z_0) &= H(z-z_0)\varphi_1(z-z_0) + \varphi_2(z)U(0) + \\ & \varphi_3(z)U'(0) + \varphi_4(z)U''(0) + \varphi_5(z)U'''(0), \end{aligned} \quad (23)$$

式中:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \sum_{i=1}^4 A_i(z)b_1, \\ \varphi_2(z) &= \sum_{i=1}^4 A_i(z)(s_i^3+a_1s_i), \\ \varphi_3(z) &= \sum_{i=1}^4 A_i(z)(s_i^2+a_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_4(z) &= \sum_{i=1}^4 A_i(z)s_i, \\ \varphi_5(z) &= \sum_{i=1}^4 A_i(z). \end{aligned} \quad (24)$$

因此,待定的 Green 函数 $G(z; z_0)$ 为

$$\begin{aligned} G(z; z_0) &= H(z-z_0)\varphi_1(z-z_0) + \\ & \varphi_2(z)U(0) + \varphi_3(z)U'(0) + \\ & \varphi_4(z)U''(0) + \varphi_5(z)U'''(0). \end{aligned} \quad (25)$$

利用式(21)和式(24),可得

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(k)}(z) &= \sum_{i=1}^4 s_i^k A_i(z)b_1, \\ \varphi_2^{(k)}(z) &= \sum_{i=1}^4 s_i^k A_i(z)(s_i^3+a_1s_i), \\ \varphi_3^{(k)}(z) &= \sum_{i=1}^4 s_i^k A_i(z)(s_i^2+a_1), \\ \varphi_4^{(k)}(z) &= \sum_{i=1}^4 s_i^{k+1} A_i(z), \\ \varphi_5^{(k)}(z) &= \sum_{i=1}^4 s_i^k A_i(z). \end{aligned} \quad (26)$$

进而,可得

$$\begin{aligned} U(z; z_0) &= H(z-z_0)\varphi_1(z-z_0) + \\ & \varphi_2(z)U(0) + \varphi_3(z)U'(0) + \\ & \varphi_4(z)U''(0) + \varphi_5(z)U'''(0), \end{aligned} \quad (27-a)$$

$$\begin{aligned} U'(z; z_0) &= \varphi_1'(z-z_0)U(0) + \varphi_2'(z)U(0) + \\ & \varphi_3'(z)U'(0) + \varphi_4'(z)U''(0) + \\ & \varphi_5'(z)U'''(0), \end{aligned} \quad (27-b)$$

$$\begin{aligned} U''(z; z_0) &= \varphi_1''(z-z_0)U(0) + \varphi_2''(z)U(0) + \\ & \varphi_3''(z)U'(0) + \varphi_4''(z)U''(0) + \\ & \varphi_5''(z)U'''(0), \end{aligned} \quad (27-c)$$

$$\begin{aligned} U'''(z; z_0) &= \varphi_1'''(z-z_0)U(0) + \varphi_2'''(z)U(0) + \\ & \varphi_3'''(z)U'(0) + \varphi_4'''(z)U''(0) + \\ & \varphi_5'''(z)U'''(0). \end{aligned} \quad (27-d)$$

将式(27)代入式(17),可得桩基的响应函数为

$$\begin{aligned} U(z) &= \int_0^L f(z_0)G(z; z_0)dz_0 = \\ & \int_0^L F_0\delta(z-z_0)(H(z-z_0)\varphi_1(z-z_0) + \\ & \varphi_2(z)U(0) + \varphi_3(z)U'(0) + \\ & \varphi_4(z)U''(0) + \varphi_5(z)U'''(0))dz_0 = \\ & F_0(H(z-z_0)\varphi_1(z-z_0) + \\ & \varphi_2(z)U(0) + \varphi_3(z)U'(0) + \\ & \varphi_4(z)U''(0) + \varphi_5(z)U'''(0)). \end{aligned} \quad (28)$$

相应地,埋置段桩基的动力响应函数可表示为

$$\begin{aligned} U(z, t) &= F_0(H(z-z_0)\varphi_1(z-z_0) + \\ & \varphi_2(z)U(0) + \varphi_3(z)U'(0) + \varphi_4(z)U''(0) + \end{aligned}$$

$$\varphi_5(z)U'''(0))\cos(\Omega t)). \quad (29)$$

2.2 非埋置段桩基

如上节所示, 式(1)可表示为

$$V^{(4)} + \kappa V = bF_0 \delta(z - z_0). \quad (30)$$

显然, 式(30)的解为

$$V(z) = \int_0^L f(z_0)G(z; z_0)dz_0. \quad (31)$$

同理, 对式(30)中的空间变量 z 施行 Laplace 变换及相应的逆变换, 可以得到

$$\begin{aligned} G(z; z_0) = & L^{-1}\left(\frac{b}{r^4 + \kappa}e^{-rz_0}\right) + \\ & L^{-1}\left(\frac{r^3}{r^4 + \kappa}\right)V(0) + L^{-1}\left(\frac{r^2}{r^4 + \kappa}\right)V'(0) + \\ & L^{-1}\left(\frac{r}{r^4 + \kappa}\right)V''(0) + L^{-1}\left(\frac{1}{r^4 + \kappa}\right)V'''(0), \end{aligned} \quad (32)$$

式中:

$$\kappa = \frac{-\rho A \Omega^2}{EI}, r = \sigma + i\tau,$$

$V(0), V'(0), V''(0), V'''(0)$ 是待定常数。

同理, 由式(32)可得到

$$\begin{aligned} G(z; z_0) = & H(z - z_0)\psi_1(z - z_0) + \\ & \psi_2(z)V(0) + \psi_3(z)V'(0) + \\ & \psi_4(z)V''(0) + \psi_5(z)V'''(0), \end{aligned} \quad (33)$$

式中:

$$\begin{aligned} \psi_1(z) = & \sum_{i=1}^4 B_i(z)b, \quad \psi_2(z) = \sum_{i=1}^4 B_i(z)r_i^3, \\ \psi_3(z) = & \sum_{i=1}^4 B_i(z)r_i^2, \quad \psi_4(z) = \sum_{i=1}^4 B_i(z)r_i, \\ \psi_5(z) = & \sum_{i=1}^4 B_i(z). \end{aligned} \quad (34)$$

相应地, 非埋置段桩基的动力响应函数为

$$\begin{aligned} V(z, t) = & F_0(H(z - z_0)\psi_1(z - z_0) + \\ & \psi_2(z)V(0) + \psi_3(z)V'(0) + \\ & \psi_4(z)V''(0) + \psi_5(z)V'''(0))\cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (35)$$

3 数值计算

3.1 计算结果验证

为验证有限差分法计算结果的准确性, 分别采用 PRENDERGAST 等的计算模型^[17]、Winkler 地基模型^[18]和 Vlasov 地基模型^[18], 计算长度为 8.76 m 的环形钢桩的固有频率随冲刷程度变化的情况, 并与 PRENDERGAST 等现场测量结果对比^[9]。

在冲刷条件下对桩基进行分析时, 通过将其周围特定深度范围内土层完全清除至冲刷深度来模拟冲刷效应。将桩基离散为 40 个桩单元, 冲刷深度以上不存在桩-土相互作用, 看作梁单元; 冲刷深度以下看作弹簧支撑梁单元。共设置 3 个冲刷等级, 分别是初始地面高度(0 冲刷等级)和 2 个冲刷深度(每个冲刷面相隔 2.19 m), 即: 桩基总长为 8.76 m, 冲刷等级为 0 时, 非埋置段初始桩长为 2.19 m, 埋置深度为 6.57 m, 可表示为 10 个梁单元和 30 个弹簧支承梁单元; 冲刷等级为 -1、-2 时, 桩基埋置深度分别为 4.38 m、2.19 m。利用自上而下移除弹簧支撑的方法模拟冲刷效应。

PRENDERGAST 等的计算模型^[17]为

$$k_0 = \frac{1.0E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\frac{E_s D_p^4}{EI} \right)^{\frac{1}{12}};$$

Winkler 模型^[18]为

$$k_0 = \pi(\lambda_s + 3G_s) \int_R^{3D_p} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 r dr;$$

Vlasov 模型^[18]为

$$k_0 = \pi(\lambda_s + 3G_s) \int_R^{3D_p} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 r dr,$$

$$k_1 = 2\pi G_s \int_R^{3D_p} \varphi^2 r dr,$$

式中: D_p 为桩基直径, EI 为桩身抗弯刚度, λ_s, G_s 为地基拉梅常数,

$$\varphi(r) = \frac{\sinh(\gamma(1 - \frac{r}{3D_p}))}{\sinh(\gamma)},$$

γ 为衰减系数, 可设为 1。

桩和土体的物理参数如下: 桩长 $L = 8.76$ m, 外径 $R = 0.17$ m, 内径 $r = 0.157$ m, 密度 $\rho = 7.8 \times 10^3$ kg/m³, 弹性模量 $E = 2.0 \times 10^5$ MPa, 泊松比为 $\nu = 0.3$; 弹性地基(砂土)的泊松比为 $\nu_s = 0.3$, 设其单位重量为 20 kN/m³, 弹性模量为^[12]

$$E_s = \frac{\rho_s \nu_c^2 (1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)}{1 - \nu_s}, \quad (36)$$

式中: ρ_s 为土体密度, ν_c 为土体压缩波速度(砂土为 213 m/s^[12])。

图 2 给出了计算所得的频率与现场测量数据的对比^[9]。随冲刷深度增加, 利用 Winkler 模型求得的第一阶频率从 37.576 Hz 降至 5.134 Hz, 且在冲刷深度 1~3 m 间与实测值高度吻合。与 Winkler 模型相比, Vlasov 模型考虑弹性地基的剪切效应, 故求得的第一阶频率稍低于 Winkler 模型所得结果。总体而言, Winkler 模型仅有一个地基

反力参数,在工程应用中广泛,且在常见的冲刷深度范围内,利用 Winkler 地基模型所得结果与实测值高度一致,故本文采用 Winkler 地基模型进行分析。

为验证 Green 函数法求解桩基位移的正确性,计算文献[19]中桩径 $d=0.3\text{ m}$,长细比 $\lambda=10$,无量纲频率 $a_0=0.3$,单桩的位移曲线,并与文献[19]对比。图 3 给出了无量纲桩身位移 $U(z)/U(0)$ 随埋置深度 z 的变化曲线。由图 3 可知,本文运用 Green 函数法所得计算结果与文献[19]基本一致,验证了该求解方法的正确性。

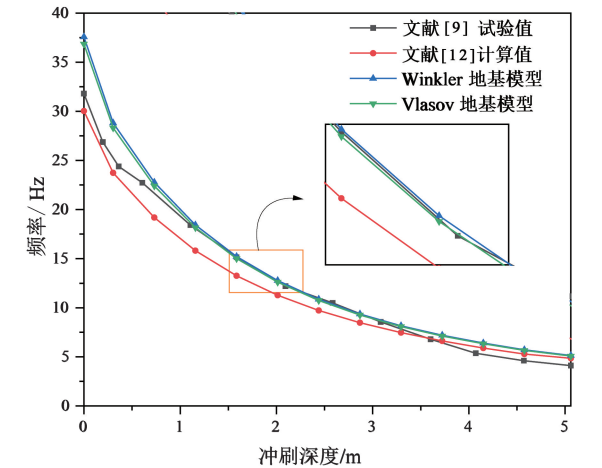


图 2 有限差分法计算的第一阶频率与 PRENDERGAST 等测量结果对比

Fig. 2 Comparison of the first-order frequencies calculated by the finite difference method with the result of the measurement by Prendergast et al.

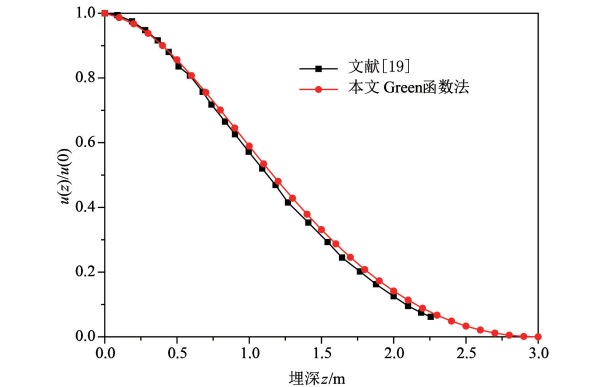


图 3 Green 函数法计算的桩身位移与文献[19]对比

Fig. 3 Comparison of pile's displacement calculated by Green's functions method and literature [19]

3.2 冲刷作用分析

本节研究冲刷作用对部分埋置单桩动力学特性的影响。利用 3.1 节中相关参数和式(36),可得地基弹性模量 E_s 为 67.41 MPa。桩端荷载为简

谐横向荷载,令其幅值为 F_0 为 1000 N。

表 1 给出了部分埋置单桩前四阶频率随冲刷程度变化的情况,其中 3 个冲刷等级分别是 0、-1 和 -2 冲刷等级。由表 1 可知,单桩的各阶频率均随冲刷等级的增加而迅速减小,这是由于埋置土体的深度随冲刷进程不断减小,桩-土相互作用效应逐渐减弱。

表 1 冲刷作用对单桩各阶频率的影响

Tab. 1 Effect of scour on the frequencies of the single pile

冲刷等级	频率/Hz			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
0	37.58	171.46	197.54	233.29
-1	12.77	75.83	179.89	217.39
-2	6.40	39.11	100.11	190.07

图 4 为部分埋置单桩桩身前四阶响应随冲刷程度变化的情况。如图 4 所示,单桩各阶响应的桩顶横向位移均随冲刷等级的增加而增大,且桩身上部反弯点处的位移值也随冲刷程度的增加而显著增大。随冲刷程度加剧,桩周土场对桩基横向位移的约束迅速减弱,桩身侧向位移幅值显著增加。

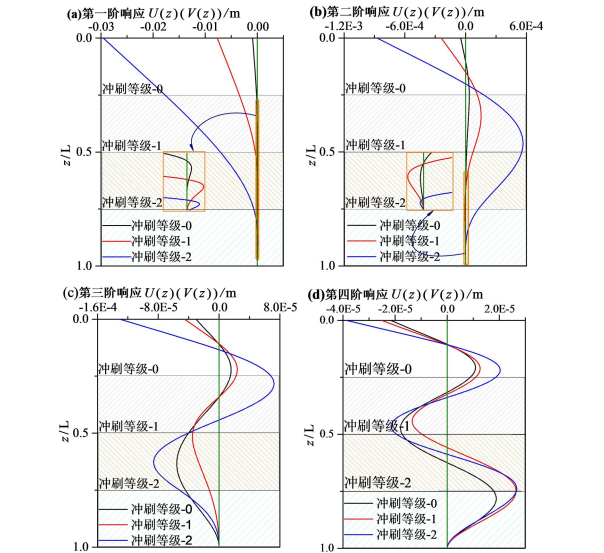


图 4 冲刷程度对单桩动力响应的影响

Fig. 4 Effect of scour degree on dynamic response of the single pile

4 参数分析

4.1 土体参数

本节分析土体弹性模量对单桩横向动力学特性的影响。桩基埋置深度 6.57 m,土体分别取:①松砂, $E_{s1}=10\text{ MPa}$;②粉质砂土, $E_{s2}=20\text{ MPa}$;③紧砂, $E_{s3}=50\text{ MPa}$ 。地基的泊松比 $\nu_s=0.3$ 。

表 2 给出了部分埋置单桩前四阶频率随土体弹性模量变化的情况, 其中土体弹性模量分别为 10、20、50 MPa。可知, 桩基的各阶频率均随参数 E_s 的增大而增大。这里, 弹性模量增大了 1 倍(4 倍), 桩基的第一阶频率增大了约 20%(40%)。如 3.1 节所示, 弹性地基反力系数值随土体弹性模量增加而增大, 相应地桩周土场对桩基侧向约束作用加强。

表 2 土体弹性模量对单桩各阶频率的影响
Tab. 2 Effect of soil's elastic modulus on the frequencies of the single pile

弹性模量/MPa	频率/Hz			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
10	24.99	75.86	104.60	170.18
20	29.43	103.38	124.51	182.08
50	35.56	153.31	173.23	215.23

图 5 给出桩身各阶响应随土体弹性模量变化的情况。如图 5 所示, 桩顶横向位移均随土层弹性模量增大而减小。相应地, 桩身反弯点处的位移值也均随土体弹性模量的增加而显著减小。与表 2 所示结果相对应, 随桩周土体弹性模量的增大, 桩周土体对桩基的侧向约束增大, 即桩-土相互作用效应增强, 部分埋置单桩的横向变形减小。

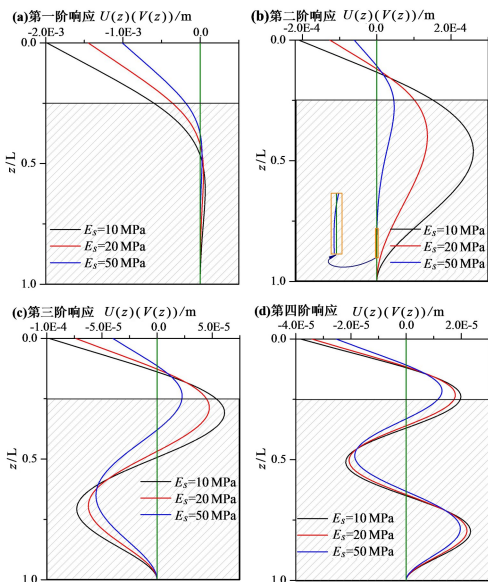


图 5 弹性模量对单桩动力响应的影响
Fig. 5 Effect of elastic modulus on dynamic response of the single pile

4.2 桩身长细比

桩身长细比 λ 简化为桩长与桩径的比值, 即 $\lambda = l/D_p$ 。通过改变桩径来改变参数 λ , 桩基的物理参数和弹性地基参数均保持不变。

表 3 给出了单桩在不同桩身长细比 λ 情况下

的前四阶频率, 其中 λ 分别取 20、30、40。由表 3 可知, 随 λ 增大, 第一阶频率减小, 而高阶频率的变化规律则比较复杂。若 λ 增大了 0.5 倍(1 倍), 单桩的第一阶固有频率分别减小了约 3%(10%)。

表 3 长细比 λ 对单桩各阶频率的影响
Tab. 3 Effect of slenderness λ on the frequencies of the single pile

长细比 λ	频率/Hz			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
20	21.35	60.42	91.96	157.18
30	20.76	82.29	93.52	124.72
40	19.24	94.51	115.87	128.50

图 6 为单桩各阶响应构型随桩身长细比变化的情况。桩基长细比越大, 其刚度越小, 越易发生屈曲和变形, 故桩身的各阶响应构型均随桩身长细比的变化而发生显著改变。随长细比增大, 桩顶横向位移增大, 同时桩身反弯点位置上移。

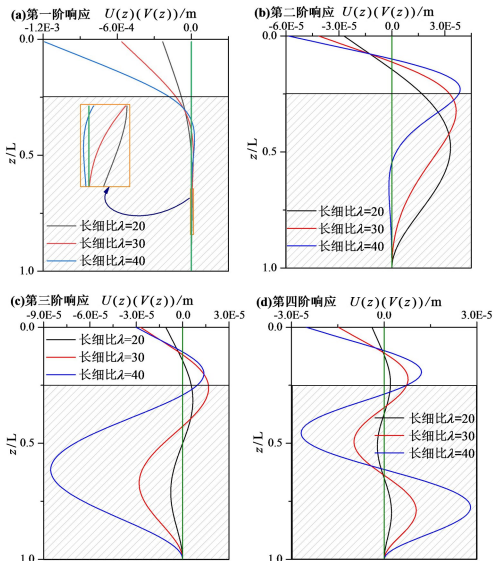


图 6 长细比 λ 对单桩动力响应的影响
Fig. 6 Effect of slenderness λ on dynamic response of the single pile foundation

5 结论

基于横向受荷桩的动力学模型, 将有限差分法和 Green 函数法相结合, 求得了受冲刷作用的单桩的各阶频率和动力响应构型, 揭示了部分埋置桩基的横向动力学特性随冲刷作用变化情况。通过数值计算和参数分析, 得到了以下主要结论:

- (1) 随冲刷程度加剧, 部分埋置单桩的各阶频率均显著降低, 相应地各阶响应幅值明显增加。
- (2) 随土体弹性模量增大, 桩基的各阶频率亦增大; 若土体弹性模量增大了 1 倍(4 倍), 其第一

阶频率约增大了 20%(40%)。

(3)随桩身长细比增大,桩基的第一阶频率减小,若 λ 增大了 0.5 倍(1 倍),单桩的第一阶固有

频率分别减小了约 3%(10%);而高阶频率的变化规律较为复杂,同时桩顶位移也显著增大。

参考文献:

[1] 牛洁楠,高云飞,周刚,等. 分数导数黏弹性模型描述的土中单管桩的水平振动[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2019, 32(4): 689-696.
NIU Jienan, GAO Yunfei, ZHOU Gang, et al. Studies on horizontal vibration of single pile in fractional derivative viscoelastic soil[J]. Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition), 2019, 32(4): 689-696.

[2] BOLDUC L C, GARDONI P, BRIAUD J L. Probability of exceedance estimates for scour depth around bridge piers [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2008, 134(2): 175-184.

[3] LIN Cheng, HAN Jie, BENNETT C, et al. Analysis of laterally loaded piles in sand considering scour hole dimensions[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2014, 140(6): 04014024.

[4] ZHANG Hao, CHEN Shengli, LIANG Fayun. Effects of scour-hole dimensions and soil stress history on the behavior of laterally loaded piles in soft clay under scour conditions[J]. Computers and Geotechnics, 2017, 84: 198-209.

[5] AI Zhiyong, LI Zhixiong. Dynamic analysis of a laterally loaded pile in a transversely isotropic multilayered half-space [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2015, 54: 68-75.

[6] POULOS H G. Single pile response to cyclic lateral load[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1982, 108(3): 355-375.

[7] MILLÁN M A, DOMÍNGUEZ J. Simplified BEM/FEM model for dynamic analysis of structures on piles and pile groups in viscoelastic and poroelastic soils[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2009, 33(1): 25-34.

[8] 胡安峰,谢康和,肖志荣. 水平荷载下单桩动力反应分析[J]. 浙江大学学报(工学版), 2003, 37(4): 420-425.
HU Anfeng, XIE Kanghe, XIAO Zhirong. Dynamic response analysis for a single pile subjected to lateral loading[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2003, 37(4): 420-425.

[9] PRENDERGAST L J, HESTER D, GAVIN K, et al. An investigation of the changes in the natural frequency of a pile affected by scour[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(25): 6685-6702.

[10] PRENDERGAST L J, GAVIN K. A comparison of initial stiffness formulations for small-strain soil-pile dynamic Winkler modelling[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2016, 81: 27-41.

[11] ANSARI R, GHOLAMI R, HOSSEINI K, et al. A sixth-order compact finite difference method for free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams[J]. Mathematical Sciences, 2011, 5(4): 307-320.

[12] BAO Ting, LIU Z L. Evaluation of Winkler model and Pasternak model for dynamic soil-structure interaction analysis of structures partially embedded in soils[J]. International Journal of Geomechanics, 2020, 20(2): 04019167.

[13] ABU-HILAL M. Forced vibration of Euler-Bernoulli beams by means of dynamic Green functions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 267(2): 191-207.

[14] LIANG Fayun, ZHANG Hao, HUANG Maosong. Influence of flood-induced scour on dynamic impedances of pile groups considering the stress history of undrained soft clay[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2017, 96: 76-88.

[15] LEVEQUE R J. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: Steady-state and time-dependent problems[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.

[16] ASMAR N H. Partial differential equations and boundary value problems with Fourier series[M]. Mineola: Dover Publications, Inc., 2016.

[17] ASHFORD S A, JUIRNARONGRIT T. Evaluation of pile diameter effect on initial modulus of subgrade reaction [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2003, 129(3): 234-242.

[18] 秦紫果,马建军,王满,等. 考虑软土特性影响的层状地基中横向受荷桩力学特性研究[J]. 河南大学学报(自然科学版), 2020, 50(2): 245-252.
QIN Ziguo, MA Jianjun, WANG Man, et al. Mechanical properties of a laterally loaded pile in layered foundation with a consideration of soft soil[J]. Journal of Henan University (Natural Science), 2020, 50(2): 245-252.

[19] MAKRIS N, GAZETAS G. Dynamic pile-soil-pile interaction. Part II: Lateral and seismic response[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1992, 21(2): 145-162.

责任编辑:郭红建