



## 基于合作狩猎的捕食者-食饵系统定性分析与反馈控制

田源, 李幻梦

引用本文:

田源, 李幻梦. 基于合作狩猎的捕食者-食饵系统定性分析与反馈控制[J]. 信阳师范学院学报自然科学版, 2023, 36(1): 22-27. doi: 10.3969/j.issn.1003-0972.2023.01.004

TIAN Yuan, LI Huanmeng. Qualitative Analysis and Feedback Control of Predator-Prey Model Based on Cooperative Hunting Effect[J]. *Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition)*, 2023, 36(1): 22-27. doi: 10.3969/j.issn.1003-0972.2023.01.004

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2023.01.004>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 一类具有反捕效应的捕食模型的定性分析与反馈控制

Qualitative Analysis and Feedback Control of Predator-Prey Model with Anti-predation Effect  
信阳师范学院学报自然科学版, 2022, 35(4): 523-527. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2022.04.002>

#### 一类具有常数收获和状态反馈控制的渔业模型研究

Research on a Kind of Fishery Model with Constant Harvesting and State Feedback Control  
信阳师范学院学报自然科学版, 2021, 34(2): 177-181. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2021.02.002>

#### 一类具有Allee效应的害虫综合治理捕食-食饵模型的动力学分析

Dynamical Analyses of an Integrated Pest Management Predator-prey Model with Allee Effect  
信阳师范学院学报自然科学版, 2018, 31(2): 173-178. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2018.02.001>

#### 一类捕食者具似Allee效应的捕食食饵集合种群系统的动力学行为研究

Studies on the Dynamic of a Predator-Prey Metapopulation System with Allee-like Effects on the Predator  
信阳师范学院学报自然科学版, 2021, 34(3): 345-349. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2021.03.001>

#### 一类具有强食饵和弱食饵的捕食系统分析

Analyses of a Class of Predator, Weaker Prey and Stronger Prey System  
信阳师范学院学报自然科学版, 2016(1): 5-8,12. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2016.01.002>

DOI:10.3969/j.issn.1003-0972.2023.01.004

文章编号:1003-0972(2023)01-0022-06

# 基于合作狩猎的捕食者-食饵系统定性分析与反馈控制

田源\*,李幻梦

(大连海事大学 理学院, 辽宁 大连 116026)

**摘要:**针对捕食系统中存在的合作狩猎现象,建立了一类具有合作狩猎的捕食者-食饵模型。为了避免特定区域捕食者数量过大导致短时间内食饵资源短缺问题,通过对捕食者群体数量进行限定及控制,建立了基于反馈控制的合作狩猎捕食者-食饵模型。首先,分析了连续系统的动力学行为,讨论了合作狩猎因子对系统正平衡态存在性及稳定性的影响;其次,利用后继函数方法及类 Poincaré 准则,讨论了反馈控制系统阶 1 周期解的存在性和稳定性;最后,利用 MATLAB 进行了数值模拟,对主要研究结果进行了验证。

**关键词:**合作狩猎;后继函数;类 Poincaré 准则;阶 1 周期解

中图分类号:O175;Q141

文献标识码:A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Qualitative Analysis and Feedback Control of Predator-Prey Model Based on Cooperative Hunting Effect

TIAN Yuan\*, LI Huanmeng

(School of Science, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China)

**Abstract:** Aiming at the cooperative hunting phenomenon in predator system, a predator-prey model with cooperative hunting is established. In order to avoid the shortage of prey resources in a short time due to the large number of predators in a specific area, a cooperative hunting predator-prey model based on feedback control is established by limiting and controlling the number of predator groups. Firstly, the dynamic behavior of the continuous system is analyzed, and the influence of cooperative hunting factors on the existence and stability of the positive equilibrium state is discussed. Secondly, the existence and stability of order-1 periodic solutions for feedback control systems are discussed by using the method of successor function and analogue of Poincaré criterion. Finally, MATLAB is used for numerical simulation to verify the obtained main research results.

**Key words:** cooperative hunting; successor function; analogue of Poincaré criterion; order-1 periodic solution

### 0 引言

在自然界中,捕食过程是促进生命进化、维持生态平衡和生物多样性的重要环节。在狩猎的背景下,合作可以简单地意味着两个或两个以上的个体为了一个共同的目标而一起行动,以提高他们的适合度。与个体狩猎相比,合作狩猎能够提高捕获猎物的成功率,降低捕食者受伤的概率,甚至是增加捕获到比自身更大食物的机会。不同类型的捕食者会根据其移动能力、社交技能、沟通能力、认知能力、猎物类型等采取不同的策略,比如狼、狮子、野狗等,经常会以合作和集体的方式攻击孤立的或

分组的猎物;其他的生物体,如鸟类、蚂蚁、蜘蛛以及一些水生生物体,也会合作寻找和攻击猎物<sup>[1]</sup>。

关于合作狩猎行为,一些学者从数学模型角度进行了刻画<sup>[2-3]</sup>,并与 Allee 效应<sup>[4]</sup>、恐惧效应<sup>[5]</sup>等结合起来进行了研究。例如,DUARTE 等<sup>[2]</sup>研究了具有合作狩猎的食物链种群动态。PATI 等<sup>[3]</sup>研究了一类具有合作狩猎的非线性离散捕食者-食饵模型,并指出捕食者群体内在的合作狩猎显著地改变了模型的动态行为。ALVES 等<sup>[4]</sup>研究了捕食者合作狩猎的 Lotka-Volterra 模型,讨论了合作狩猎对捕食者-食饵模型动力学的影响,并揭示了合作狩猎对捕食者的 Allee 效应。PAL 等<sup>[5]</sup>研究

收稿日期:2021-10-26;修订日期:2022-10-11; \* 通信联系人, E-mail: tianyuan@dlnu.edu.cn

基金项目:国家自然科学基金项目(11401068);中央高校基本科研业务费(3132022199)

作者简介:田源(1981—),女,辽宁大连人,副教授,博士,主要从事生物数学研究。

了捕食者-食饵模型中合作狩猎与恐惧的影响,并指出合作狩猎会破坏捕食者-食饵系统的稳定性,使食饵产生恐惧心理从而导致其出生率下降,并且会诱导捕食者种群产出强烈的 Allee 效应。

捕食者种群内在的合作狩猎确实有助于提高捕食者捕获猎物的成功率,这对一些种群来说确实有利于其生存。但另一方面,若系统中捕食者数量超过一定限度,那么捕食者的合作狩猎会导致系统稳态时食饵数量减少,如果合作狩猎强度大甚至会导致原系统失衡而呈现一定的周期震荡。为了避免此种情况的发生,需要对特定区域的捕食者种群数量加以限定,当捕食者数量达到限定值时,采取一定的控制措施(人为捕获、区域分流等),使得区域内捕食者数量低于限定值。针对这样的瞬时控制系统,近年来,许多学者借助于半连续动力系统理论<sup>[6]</sup>对不同背景的生物模型进行了研究<sup>[7-11]</sup>。

本文从控制捕食者数量角度出发,结合其内在的合作狩猎行为,研究一类具有合作狩猎的捕食者-食饵模型,并分析合作狩猎对系统动力学性态产生的影响。同时,依据实际区域捕食者数量变化提出状态依赖反馈控制措施,为种群生物多样性提供理论支持。

## 1 模型建立

经典的 Lotka-Volterra 捕食者-食饵模型的一般形式为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xB(x) - D(x, y)y, \\ \frac{dy}{dt} = cD(x, y)y - m(y)y, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x = x(t)$  和  $y = y(t)$  分别代表食饵和捕食者在  $t$  时刻的种群密度,  $B(x)$  为食饵种群的增长率,  $D(x, y)$  为功能性反应函数,  $c$  为食饵到捕食者的转化率,  $m(y)$  为捕食者的死亡率。

考虑 Logistic 型增长率、Holling-II 型功能反应函数及固定捕食者死亡率,即  $B(x) = rx(1-x/K)$ ,  $D(x, y) = bx/(1+hx)$ ,  $m(y) = m$ 。此外,为进一步考虑捕食者种群内部的合作狩猎行为,令  $\alpha$  表示合作因子,则  $\alpha y$  为合作狩猎诱导的捕食率增加项,于是模型(1)转化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1-\frac{x}{K}) - (b+\alpha y)\frac{xy}{1+hx}, \\ \frac{dy}{dt} = c(b+\alpha y)\frac{xy}{1+hx} - my, \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $r$  和  $K$  分别为食饵种群的内在增长率和环

境容纳量,  $b$  表示捕食者个体捕食率,  $\alpha$  为合作因子(强度或比例),  $h$  表示捕食者捕获单一食饵的时间,  $c$  表示从食饵到捕食者转化的转化率,  $m$  为捕食者的自然死亡率。

为了避免捕食者种群数量过大导致短时间内食饵资源短缺问题,考虑对固定区域的捕食者群体数量进行控制。设定区域内捕食者数量上限(分流阈值)  $y_T$ , 即当捕食者种群数量达到阈值  $y_T$  时,人为辅助部分捕食者扩散(迁移),过程中可能会涉及部分食饵种群。记  $p$  和  $q$  分别为食饵和捕食者种群的扩散系数。同时,为了提供捕食者种群更多食物,投放一定数量的食饵,记为  $\tau$ 。基于以上控制措施,建立如下状态反馈控制系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1-\frac{x}{K}) - (b+\alpha y)\frac{xy}{1+hx}, \\ \frac{dy}{dt} = c(b+\alpha y)\frac{xy}{1+hx} - my, \\ \Delta x = -px + \tau, \\ \Delta y = -qy, \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \Delta x \\ \Delta y \end{cases}} \right\} \begin{matrix} y < y_T, \\ y = y_T. \end{matrix} \quad (3)$$

基于模型的生物学意义,所有参数均非负,限定研究的区域为  $\Omega_0 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq K, y \geq 0\}$ 。

## 2 动力学性态分析

首先,对连续动力系统(2)进行分析,讨论合作狩猎因子对系统(2)平衡态存在性的影响;其次,对系统(3)进行分析,探讨反馈控制作用下系统(3)阶1周期解的存在性和稳定性。

### 2.1 系统(2)定性分析

为表述方便,对于  $0 \leq x \leq K$ , 定义

$$f(x, y) = r(1-\frac{x}{K}) - (b+\alpha y)\frac{y}{1+hx},$$

$$g(x, y) = c(b+\alpha y)\frac{x}{1+hx} - m,$$

$$y_1(x) = \frac{rc}{m}x(1-\frac{x}{K}),$$

$$y_2(x) = \frac{m - (bc - hm)x}{cx},$$

$$\alpha(x) = \frac{m^2 K + (hm - bc)mKx}{rc^2 x^2 (K - x)}.$$

记

$$y_{\max} = \max\{y | f(x, y) = 0\}, \bar{\alpha} = \frac{y_2(K)}{y_{\max}}.$$

若  $h \geq bc/m$ , 则对于  $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ , 有  $y \rightarrow 0$ , 即捕食者种群最终趋于灭绝。因此,从系统持久性的角度考虑,以下假定  $bc/2m < h < bc/m$ 。

## 2.1.1 平衡态的存在性

系统(2)始终存在两个平衡态:  $E_0(0, 0)$ ,  $E_K(K, 0)$ 。当  $\underline{K} < K < \bar{K}$  时, 记

$$\alpha_{\min} = \alpha(K + 3\bar{K} - \sqrt{(9\bar{K} - K)(\bar{K} - K)})/4,$$

这里  $\underline{K} = 1/h$ ,  $\bar{K} = m/(bc - hm)$ 。

**定理 1** 当条件(H1-1):  $K = \bar{K}$ ,  $\alpha > 0$ ; 或(H1-2):  $K > \bar{K}$ ,  $\alpha \geq 0$ ; 或(H2-1):  $\underline{K} < K < \bar{K}$ ,  $\alpha = \alpha_{\min}$  时, 系统(2)存在唯一的正平衡态。

当(H2-2):  $\underline{K} < K < \bar{K}$ ,  $ha > \alpha_{\min}$  时, 系统(2)存在两个正平衡态; 当(H2-3):  $\underline{K} < K < \bar{K}$ ,  $0 \leq \alpha < \alpha_{\min}$  时, 系统(2)不存在正平衡态。

**证明** 设  $E^*(x^*, y^*)$  为系统(2)的正平衡态, 则  $x^*$  和  $y^*$  同时满足

$$f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0.$$

这意味着  $y_2(x^*) = \alpha y_1(x^*)$ , 即  $x^*$  为  $y_2(x) = \alpha y_1(x)$  在区间  $[0, K]$  内的实根。此外, 由  $y_2(x) = 0$  可得  $x = \bar{K}$ 。

对于情况(H1-1)及(H1-2),  $y_2(x) = \alpha y_1(x)$  在区间  $[0, K]$  内有且仅有一个实根, 即系统(2)存在唯一的正平衡态。

对于情况(H2-1)~(H2-3), 由  $y_2(x) = \alpha y_1(x)$  可得  $\alpha = \alpha(x)$ 。显然, 对于  $0 < x < K$ , 有  $\alpha(x) > 0$ 。对  $\alpha(x)$  求导并令  $\alpha'(x) = 0$ , 可得

$$x_{1,2} = \frac{K + 3\bar{K} \mp \sqrt{(9\bar{K} - K)(\bar{K} - K)}}{4}.$$

容易验证,  $x_1 < K$ ,  $x_2 > \bar{K}$ 。当  $x \rightarrow 0$  或  $x \rightarrow +\infty$  时, 有  $\alpha(x) \rightarrow +\infty$ , 因此,  $\alpha(x)$  在  $x = x_1$  处取得最小值  $\alpha_{\min}$ 。当  $\alpha > \alpha_{\min}$  时,  $y_2(x) = \alpha y_1(x)$  在区间  $[0, K]$  有两个实根, 即系统(2)存在两个正平衡态; 当  $\alpha = \alpha_{\min}$  时,  $y_2(x) = \alpha y_1(x)$  在区间  $[0, K]$  有唯一的实根, 即系统(2)存在唯一的正平衡态; 当  $0 \leq \alpha < \alpha_{\min}$  时,  $y_2(x) = \alpha y_1(x)$  在区间  $[0, K]$  没有实根, 即系统(2)不存在正平衡态。证毕。

综合以上分析可知, 食饵种群的环境容纳量  $K$  与捕食者的合作狩猎因子  $\alpha$  均会对系统(2)产生影响。当  $K \geq \bar{K}$  时, 合作狩猎会导致系统稳态时食饵数量减少; 而当  $\underline{K} < K < \bar{K}$  时, 则存在合作狩猎强度的一个临界值  $\alpha_{\min}$ , 当合作狩猎因子低于该临界值  $\alpha_{\min}$  时, 不改变原系统的动力学性态, 即捕食者种群最终趋于灭绝; 当合作狩猎强度达到或者超过该临界值  $\alpha_{\min}$  时, 捕食者通过合作猎取更多的猎物实现了与食饵种群共存, 即系统(2)存在正平衡态。

## 2.1.2 平衡态的稳定性

系统(2)在平衡点  $\bar{E}(\bar{x}, \bar{y})$  处的 Jacobi 矩阵为

$$J_{\bar{E}} = \begin{pmatrix} f(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{x}f_x(\bar{x}, \bar{y}) & \bar{x}f_y(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{y}g_x(\bar{x}, \bar{y}) & g(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}g_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix},$$

其中:

$$f_x(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{r}{K} + \frac{h\bar{y}(b + \alpha\bar{y})}{(1 + h\bar{x})^2},$$

$$f_y(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{b + 2\alpha\bar{y}}{1 + h\bar{x}},$$

$$g_x(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{c(b + \alpha\bar{y})}{(1 + h\bar{x})^2}, g_y(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{ac\bar{x}}{1 + h\bar{x}}.$$

对应的特征方程为

$$\lambda^2 - p_{\bar{E}}\lambda + q_{\bar{E}} = 0,$$

其中:

$$p_{\bar{E}} = g + f + \bar{x}f_x + \bar{y}g_y,$$

$$q_{\bar{E}} = fg + \bar{x}g f_x + \bar{y}f g_y + \bar{x}\bar{y}(f_x g_y - f_y g_x).$$

**定理 2** 平衡态  $E_0(0, 0)$  为鞍点; 对于情况(H2-1)、(H2-3), 平衡态  $E_K(K, 0)$  局部渐近稳定; 对于情况(H1-2),  $E_K(K, 0)$  为鞍点。

**证明** 由  $q_{E_0} = -rm < 0$  可知,  $E_0(0, 0)$  为鞍点。对于  $E_K(K, 0)$ , 有  $q_{E_K} = -rg(K, 0)$ ,  $p_{E_K} = -r + g(K, 0)$ 。对于情况(H1-2), 有  $q_{E_K} < 0$ , 故  $E_K(K, 0)$  为鞍点; 对于(H2-1)和(H2-3), 有  $q_{E_K} > 0$ ,  $p_{E_K} < 0$ , 故  $E_K(K, 0)$  局部渐近稳定。证毕。

为讨论正平衡态的稳定性, 当  $\alpha > 0$  时, 令

$$B_1(x) = bhK + acK(1 + hx),$$

$$B_2(x) = b^2(3 + hx)^2 +$$

$$4(2 + hx)\left(b^2 - \frac{rax(1 + hx)^2}{K}\right).$$

记

$$y_3(x) = \frac{B_1(x) - \sqrt{(B_1(x))^2 + 4ahrK(1 + hx)^2}}{2ahK},$$

$$y_4(x) = \frac{b(3 + hx) - \sqrt{B_2(x)}}{2\alpha(2 + hx)}.$$

**定理 3** 当  $\alpha = 0$  时, 若  $\bar{K} < K < 2\bar{K} + \underline{K}$ , 则  $E^*(x^*, y^*)$  全局渐近稳定; 若  $K > 2\bar{K} + \underline{K}$ , 则  $E^*(x^*, y^*)$  不稳定。当  $\alpha > 0$  时, 若  $E^*(x^*, y^*)$  满足  $y_4(x^*) < y^* < y_3(x^*)$ , 则  $E^*(x^*, y^*)$  是局部渐近稳定的; 反之,  $E^*(x^*, y^*)$  不稳定。

**证明** 当  $\alpha = 0$  时,  $q_{E^*} = -x^* y^* f_y g_x > 0$ 。

又

$$p_{E^*} = -\frac{r\bar{K}}{K(\underline{K} + \bar{K})}(2\bar{K} + \underline{K} - K),$$

因此,当  $K < 2\bar{K} + \underline{K}$  时,有  $p_{E^*} < 0$ ,故  $E^*(x^*, y^*)$  局部渐近稳定。取 Dulac 函数  $B(x, y) = (1 + hx)y^{a-1}/x$ , 则有

$$\frac{\partial(Bxf)}{\partial x} + \frac{\partial(Byg)}{\partial y} = x^{-1}y^{a-1}\left(rx(h - \frac{1+2hx}{K}) + a((bc-hm)x - m)\right),$$

取  $a = r(Kh - 1)/(K(bc - hm))$ , 则有

$$-\frac{2rh}{K}\left(x - \frac{K - \underline{K}}{2}\right)^2 + \frac{r(K - \underline{K})(K - (2\bar{K} + \underline{K}))}{2Kh} \leq 0,$$

从而正平衡态  $E^*(x^*, y^*)$  全局渐近稳定。

当  $K > 2\bar{K} + \underline{K}$  时,  $E^*(x^*, y^*)$  不稳定。

当  $\alpha > 0$  时,若  $y_4(x^*) < y^* < y_3(x^*)$ , 则有  $x^*f_x + y^*g_y < 0$  和  $x^*y^*(f_xg_y - f_yg_x) > 0$ , 即  $p_{E^*} < 0, q_{E^*} > 0$ , 故正平衡态  $E^*(x^*, y^*)$  是稳定的;反之,  $E^*(x^*, y^*)$  不稳定。证毕。

## 2.2 控制系统(3)定性分析

仅考虑  $\alpha > 0, K \geq \bar{K}$  的情况。根据定理 1, 系统(2)存在唯一的正平衡态  $E(x^*, y^*)$ , 其中  $x^*$  为方程  $y_1(x) = y_2(x)$  在区间  $(0, K)$  内的实根,  $y^* = y_2(x^*)$ 。

对于系统(3), 脉冲集为  $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid 0 \leq x \leq K, y = y_T\}$ ,  $M$  在脉冲函数作用下的像集为  $N = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid 0 \leq x \leq K, y = (1 - q)y_T\}$ 。

记  $N$  与水平等倾线  $dy/dt = 0$  的交点为  $A(x_A, (1 - q)y_T)$ , 与垂直等倾线  $dx/dt = 0$  的交点为  $B(x_B, (1 - q)y_T)$ 。记

$$\rho(y_T) = \frac{(1 - q)y_T(b + a(1 - q)y_T)}{r} - 1,$$

则有

$$x_A = \frac{m}{bc - hm + ac(1 - q)y_T},$$

$$x_B = \frac{hK - 1 + \sqrt{(1 - hK)^2 + 4hK\rho(y_T)}}{2h}.$$

令

$$\bar{\tau}_p^1 = x_A - (1 - p)x_A^-, \bar{\tau}_p^2 = x_B - (1 - p)x_B^-.$$

从实际控制及需求角度,一般要求  $\tau \leq \bar{\tau}_p^2$ 。

**定义 1** 对于任意的  $x_s \geq 0$ , 如果系统(3)起始于  $S(x_s, (1 - q)y_T) \in N$  的轨线与脉冲集  $M$  相交, 记交点为  $S^-(x_s^-, y_T)$ , 经脉冲作用映射到点  $S^+(x_s^+, (1 - q)y_T) \in N$ , 则后继函数  $f_{\text{sor}}$  定义为:  $f_{\text{sor}}(x_s) = x_s^+ - x_s^-$ 。

可以证明,  $f_{\text{sor}}$  为连续函数。

**定义 2** 设  $(\varphi(t), \psi(t))$  为系统(3)的周期解,

且满足  $(\varphi(T^+), \psi(T^+)) = (\varphi(0), \psi(0))$ ,  $(\varphi(t), \psi(t)) \neq (\varphi(0), \psi(0))$ ,  $\forall 0 < t < T$ 。记  $\Gamma = \{(\varphi(t), \psi(t)) \mid 0 \leq t \leq T\}$  以及  $\Theta = \Gamma \cap M$ 。令  $k$  表示  $\Theta$  中点的个数, 则  $(\varphi(t), \psi(t))$  称为系统(3)的阶  $k$  周期解。

### 2.2.1 阶 1 周期解存在性

**定理 4** 当  $\alpha > 0, K \geq \bar{K}, y_4(x^*) < y^* < y_3(x^*)$  时, 对于任意的  $0 < y_T \leq y^*$ , 系统(3)存在阶 1 周期解。

**证明** 由定理 3, 当  $y_4(x^*) < y^* < y_3(x^*)$  时, 正平衡态  $E(x^*, y^*)$  局部渐近稳定。

情况 i)  $\tau = \bar{\tau}_p^2$ 。  $f_{\text{sor}}(x_B) = x_B^+ - x_B^- = 0$ , 即系统(3)存在阶 1 周期解。

情况 ii)  $\tau < \bar{\tau}_p^2$ 。

若 ii-1)  $\tau = \bar{\tau}_p^1$ , 则有  $f_{\text{sor}}(x_A) = x_A^+ - x_A^- = 0$ , 即系统(3)存在阶 1 周期解;

若 ii-2)  $\tau > \bar{\tau}_p^1$ , 则有  $f_{\text{sor}}(x_A) = x_A^+ - x_A^- > 0$ , 如图 1(a) 所示。

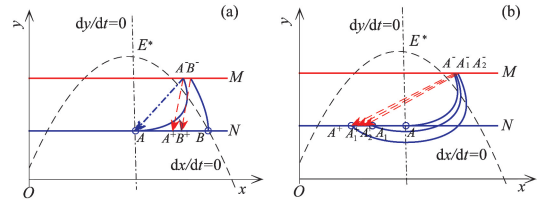


图 1 系统(3)轨线走势图

Fig. 1 Trajectory chart of system (3)

由后继函数  $f_{\text{sor}}$  的连续性, 存在  $L(x_L, (1 - q)y_T)$  使得  $f_{\text{sor}}(x_L) = 0$ , 即系统(3)存在阶 1 周期解。

若 ii-3)  $\tau < \bar{\tau}_p^1$ , 则有  $f_{\text{sor}}(x_A) = x_A^+ - x_A^- < 0$ 。同时, 有  $f_{\text{sor}}(x_{A_2}) = (1 - p)x_{A_2}^- + \tau - x_{A_2}^+ = (1 - p)(x_{A_2}^- - x_{A_2}^-) > 0$ 。另一方面, 给定  $\epsilon = (f_{\text{sor}}(A)/(2 - p))^2$ , 取  $A_1 \in U(A, \sqrt{\epsilon}) \cap N$ , 如图 1(b) 所示, 经脉冲作用后有  $x_{A_1}^+ - x_{A_1}^- < (1 - p)\sqrt{\epsilon}$ 。因此,  $x_{A_1}^- - x_{A_1}^+ > -f_{\text{sor}}(A) - (1 - p)\sqrt{\epsilon} - \sqrt{\epsilon} = -2f_{\text{sor}}(A) > 0$ , 即  $f_{\text{sor}}(x_{A_1}) = x_{A_1}^+ - x_{A_1}^- < 0$ 。进而可得系统(3)存在阶 1 周期解。证毕。

### 2.2.2 阶 1 周期解稳定性

设  $(\varphi(t), \psi(t)) (0 \leq t \leq T)$  为系统(3)的阶 1 周期解。记  $\varphi_1 = \varphi(T), \psi_1 = y_T, \varphi_0 = \varphi(0) = (1 - p)\varphi_1 + \tau, \psi_0 = \psi(0) = (1 - q)y_T$ 。定义

$$\Gamma(\varphi_1) = \ln\left(\frac{((1 - p)\varphi_1 + \tau)g(\varphi_1, y_T)}{(1 - p)\varphi_1 |g((1 - p)\varphi_1 + \tau, (1 - q)y_T)|}\right).$$

**定理 5** 系统(3)的阶 1 周期解 $(\varphi(t), \psi(t))$   
( $0 \leq t \leq T$ )是轨道渐近稳定的,如果

$$\int_0^T \left( \frac{\varphi\psi \left( h \frac{b + \alpha\psi}{1 + h\psi} + c\alpha \right)}{1 + h\varphi} - \frac{r\varphi}{K} \right) dt < \Gamma(\varphi_1). \tag{4}$$

**证明** 对于系统(3),有

$$P(x, y) = rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{(b + \alpha y)xy}{1 + hx},$$

$$Q(x, y) = c(b + \alpha y) \frac{xy}{1 + hx} - my,$$

$$I_1(x, y) = -px + \tau,$$

$$I_2(x, y) = -qy,$$

$$\chi(x, y) = y - y_T.$$

经计算得

$$\frac{\partial P}{\partial x} = r \left( 1 - \frac{2x}{K} \right) - \frac{(b + \alpha y)y}{(1 + hx)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{cx(b + 2\alpha y)}{1 + hx} - m,$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = -p, \quad \frac{\partial I_2}{\partial y} = -q,$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial y} = \frac{\partial I_2}{\partial x} = 0.$$

于是,有

$$\Delta_1 = (1 - p) \frac{Q_+}{Q} = (1 - p)(1 - q) \frac{g(\varphi_0, \psi_0)}{g(\varphi_1, \psi_1)}.$$

又

$$\int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{1}{x} dx + \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{1}{y} dy +$$

$$\int_0^T \left( \frac{\varphi\psi \left( h \frac{b + \alpha\psi}{1 + h\psi} + c\alpha \right)}{1 + h\varphi} - \frac{r\varphi}{K} \right) dt,$$

故有

$$\mu_2 = \Delta_1 \exp \left( \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dt \right) =$$

$$\Delta_1 \frac{\varphi_1 \psi_1}{\varphi_0 \psi_0} \exp \left( \int_0^T \left( \frac{\varphi\psi \left( h \frac{b + \alpha\psi}{1 + h\psi} + c\alpha \right)}{1 + h\varphi} - \frac{r\varphi}{K} \right) dt \right).$$

因此,当不等式(4)成立时,有 $|\mu_2| < 1$ ,根据类 Poincaré 准则<sup>[11]</sup>,系统(3)的阶 1 周期解 $(\varphi(t), \psi(t))$ 是轨道渐近稳定的。证毕。

### 3 数值模拟

对于系统(2),取  $r = 0.385, K = 100, b = 0.4, c = 0.5, m = 0.2$ 。通过改变  $h$  和  $\alpha$  的值来验证文

中取得的结论。

#### 3.1 连续动力系统数值模拟

当  $h = 0.988$  及  $\alpha = 5 \times 10^{-5}$  时,根据定理 1 (H1-2),系统(2)存在唯一的正平衡态,如图 2(a)所示;当  $h = 0.991$  时, $\alpha_{\min} = 8.976 6 \times 10^{-5}$ 。对于  $\alpha = 2 \times 10^{-4}, \alpha = \alpha_{\min}$  及  $\alpha = 8 \times 10^{-5}$ ,根据定理 1,系统(2)分别存在两个正平衡态、一个正平衡态及没有正平衡态,如图 2(b)–(d)。

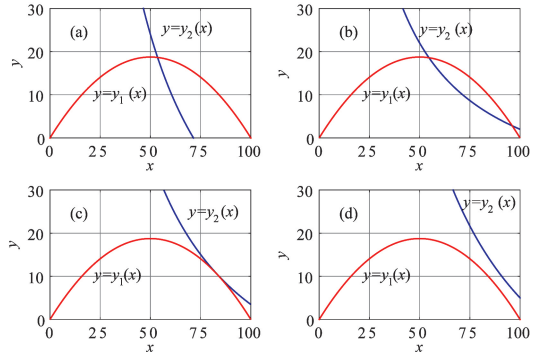


图 2 系统(2)正平衡态的存在情况

Fig. 2 Existence of positive equilibrium of system (2)

图 3 显示了  $h = 0.988$  及  $\alpha = 5 \times 10^{-5}$  时系统(2)正平衡态  $E^*(68.521 2, 20.758 4)$  稳定性。

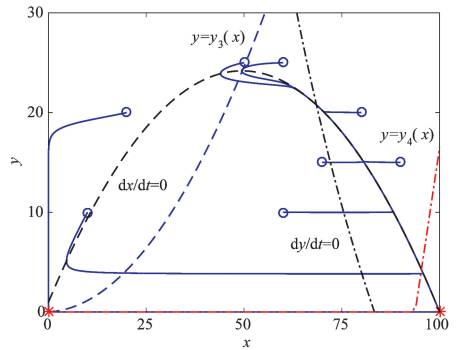


图 3 系统(2)正平衡态的稳定性

Fig. 3 Stability of the positive equilibrium of system (2)

#### 3.2 控制系统数值模拟

对于控制系统(3),为验证定理 4,取  $y_T = 18, p = 0.1, q = 0.5, \tau = 10$ 。系统(3)的时间序列与相图如图 4 所示,可见系统(3)存在阶 1 周期解。另外,经计算可得  $\mu_2 \approx 0$ ,即阶 1 周期解是轨道渐近稳定的。

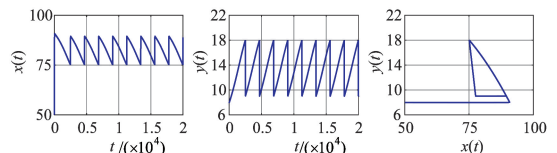


图 4 系统(3)解轨线时间序列与相图

Fig. 4 Time series and phase portrait of solution of system (3)

## 4 结论

针对捕食系统中存在的合作狩猎现象,建立了一类具有合作狩猎的捕食者-食饵模型。通过对系统的动力学行为分析,讨论了合作狩猎因子对系统正平衡态存在性及稳定性的影响。研究表明,当食饵种群的环境容纳量足够大时,合作狩猎行为会降低系统稳态时食饵数量;当环境容纳量较小时,合作狩猎强度会影响系统正平衡态的数量,进而对系统动力学行为产生影响。此外,为了避免特

定区域捕食者数量过大导致短时间内食饵资源短缺问题,通过对捕食者群体数量进行限定及控制,建立了基于反馈控制的合作狩猎捕食者-食饵模型。利用后继函数方法以及类庞加莱准则,讨论了系统阶 1 周期解的存在性以及稳定性。研究结果表明,当捕食者之间存在合作狩猎行为导致食饵资源短缺时,通过人为施加一些控制措施以减少区域的捕食者密度,有利于实现捕食者和食饵生存的良好生态环境。

## 参考文献:

- [1] PACKER C, RUTTAN L. The evolution of cooperative hunting[J]. *The American Naturalist*, 1988, 132(2): 159-198.
- [2] DUARTE J, JANUÁRIO C, MARTINS N, et al. Chaos and crises in a model for cooperative hunting: A symbolic dynamics approach[J]. *Chaos*, 2009, 19(4): 043102.
- [3] PATI N C, LAYEK G C, PAL N. Bifurcations and organized structures in a predator-prey model with hunting cooperation[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2020, 140: 110184.
- [4] ALVES M T, HILKER F M. Hunting cooperation and Allee effects in predators[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2017, 419: 13-22.
- [5] PAL S, PAL N, SAMANTA S, et al. Effect of hunting cooperation and fear in a predator-prey model[J]. *Ecological Complexity*, 2019, 39: 100770.
- [6] 陈兰荪. 害虫治理与半连续动力系统几何理论[J]. *北华大学学报(自然科学版)*, 2011, 12(1): 1-9.  
CHEN Lansun. Pest control and geometric theory of semi-continuous dynamical system[J]. *Journal of Beihua University (Natural Science)*, 2011, 12(1): 1-9.
- [7] 喻婷婷, 叶凯莉, 宋新宇. 一类具有 Allee 效应的害虫综合治理捕食者-食饵模型的动力学分析[J]. *信阳师范学院学报(自然科学版)*, 2018, 31(2): 173-178.  
YU Tingting, YE Kaili, SONG Xinyu. Dynamical analyses of an integrated pest management predator-prey model with Allee effect[J]. *Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition)*, 2018, 31(2): 173-178.
- [8] 黄立壮, 刘琼. 一类具有常数收获和状态反馈控制的渔业模型研究[J]. *信阳师范学院学报(自然科学版)*, 2021, 34(2): 177-181.  
HUANG Lizhuang, LIU Qiong. Research on a kind of fishery model with constant harvesting and state feedback control[J]. *Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition)*, 2021, 34(2): 177-181.
- [9] 甘静雯, 李帅, 宋新宇. 具有脉冲入侵的 Lotka-Volterra 捕食系统的动力学分析[J]. *信阳师范学院学报(自然科学版)*, 2018, 31(3): 362-367.  
GAN Jingwen, LI Shuai, SONG Xinyu. Dynamical analyses of a Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive invasion[J]. *Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition)*, 2018, 31(3): 362-367.
- [10] 李帅, 朱聪聪, 郭红建, 等. 一类状态反馈脉冲控制下的营养-产毒浮游植物动力学模型分析[J]. *信阳师范学院学报(自然科学版)*, 2019, 32(2): 179-184.  
LI Shuai, ZHU Congcong, GUO Hongjian, et al. Dynamical analysis of a nutrient-toxin-producing phytoplankton system under state impulsive feedback control[J]. *Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition)*, 2019, 32(2): 179-184.
- [11] TIAN Y, SUN K B, CHEN L S. Geometric approach to the stability analysis of the periodic solution in a semi-continuous dynamic system[J]. *International Journal of Biomathematics*, 2014, 7(2): 1450018.

责任编辑:郭红建