



C-Bézier和H-Bézier基函数在热传导问题求解中的应用

孙兰银, 苏芳明

引用本文:

孙兰银, 苏芳明. C-Bézier和H-Bézier基函数在热传导问题求解中的应用[J]. 信阳师范学院学报自然科学版, 2022, 35(3): 358-363. doi: 10.3969/j.issn.1003-0972.2022.03.003

SUN Lanyin, SU Fangming. Application of C-Bézier and H-Bézier Basis in Solving Heat Conduction Problems[J]. Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition), 2022, 35(3): 358-363. doi: 10.3969/j.issn.1003-0972.2022.03.003

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2022.03.003>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于正则化的模糊 C-均值聚类算法及其在T-S模糊系统辨识问题中的应用

Fuzzy C-means Clustering Algorithm Based Regularization and Its Application in the Problem of T-S Fuzzy System Identification

信阳师范学院学报自然科学版, 2016(1): 124-128. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2016.01.030>

一种多核神经网络集成的地震要素预测方法

A Multi-core Radical Basis Neural Network Integrated Method for the Prediction of Earthquake Elements

信阳师范学院学报自然科学版, 2021, 34(1): 124-129. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2021.01.021>

拟线性椭圆问题多水平有限元方法的后验误差估计

A Posteriori Error Estimates of Multi-Level Finite Element Methods for Second Order Quasi-Linear Elliptic Problems

信阳师范学院学报自然科学版, 2017, 30(4): 531-534. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2017.04.004>

基于等几何-边界元法的热弹性力学问题分析

Thermoelastic Mechanics Analysis Based on Isogeometric Boundary Element Method

信阳师范学院学报自然科学版, 2021, 34(4): 661-666. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2021.04.026>

基于本征正交分解加速的二维位势问题边界元法分析

Boundary Element Method Analysis of Two-dimensional Potential Problem Based on Proper Orthogonal Decomposition Acceleration

信阳师范学院学报自然科学版, 2022, 35(1): 11-16. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2022.01.003>

C-Bézier 和 H-Bézier 基函数在热传导问题求解中的应用


孙兰银*, 苏芳明

(信阳师范学院 数学与统计学院, 河南 信阳 464000)

摘要:运用 C-Bézier 和 H-Bézier 基函数构造有限元方法中的试探函数和测试函数空间,并分析了误差。通过数值算例,数值解的误差精度较 Lagrange 基函数提升了 1 到 3 个数量级,说明这两类基函数在模拟特定类型的热传导问题时具有更好的逼近效果。

关键词:热传导方程;有限元方法;C-Bézier 基函数;H-Bézier 基函数

中图分类号:O242.1 **文献标识码:**A

开放科学(资源服务)标识码(OSID): 

Application of C-Bézier and H-Bézier Basis in Solving Heat Conduction Problems

SUN Lanyin*, SU Fangming

(College of Mathematics and Statistics, Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China)

Abstract: C-Bézier and H-Bézier basis functions are applied to the space of trial function and test function in the finite element method and the errors are analyzed. By means of numerical examples, the error accuracy of numerical solution is improved by one to three orders of magnitude compared with Lagrange basis function, it is shown that these two kinds of basis functions have better approximations in simulating specific heat conduction problems.

Key words: heat conduction equation; finite element method; C-Bezier basis function; H-Bezier basis function

0 引言

在自然界中,热传导、电磁势和流体等问题都可用偏微分方程来描述,它们的解一般很难用解析公式表达出来,运用数值方法来计算它们的近似解是十分重要的。有限元方法是现代科学与工程计算领域中求解偏微分方程的一个主要工具。1943年,数学家 COURANT^[1]提出了有限元方法;20世纪50年代,有限元方法是作为解决固体力学问题的方法出现的;1960年,CLOUGH^[2]在处理平面弹性问题时,第一次提出了“有限元方法”这一名称,并成功应用于飞机结构的分析;20世纪60年代,冯康发表的论文《基于变分原理的差分格式》^[3],标志着有限元方法在我国的诞生。基于传统的有限元方法,学者们也提出了许多新的数值计算方法,例如:混合有限元方法^[4]、自适应有限元法^[5]、DG方法^[6]、弱 Galerkin 有限元法^[7]。

有限元基函数的选取会对数值解的精确度产生影响。为解决高阶多项式曲线的表示问题,文献[8-9]等对混合代数和三角多项式空间进行了扩展,在空间 $T = \text{span}\{1, t, \dots, t^{p-2}, \sin t, \cos t\}$ 上定义了 p 次 C-Bézier 基函数以及空间 $T = \text{span}\{\sinh t, \cosh t, t^{q-2}, \dots, t, 1\}$ 上的 q 次 H-Bézier 基函数。

如何得到一个精确度高且计算量较小的方法一直是有限元方法研究中的一个重要课题。HUGES等^[10]将 NURBS 基函数应用于有限元分析,BHATTI等^[11]提出在求解偏微分方程中使用 Bernstein 基函数。本文考虑一维热传导方程初边值问题的数学模型,在有限元方法中利用 C-Bézier 和 H-Bézier 基函数构造试探函数和测试函数空间,通过数值实验来验证理论结果的正确性与方法的可行性。

收稿日期:2021-10-01;修订日期:2022-04-11;*. 通信联系人,E-mail: lysun@xynu.edu.cn

基金项目:国家自然科学基金项目(11801490);河南省高校科技创新人才支持计划项目(22HASTIT021);河南省重点研发与推广专项(科技攻关)项目(212102210394);信阳师范学院研究生科研创新基金项目(2021KYJJ48)

作者简介:孙兰银(1988—),男,河南信阳人,讲师,博士,主要从事计算数学研究。

1 一维热传导方程

热传导问题是描述在某个区域内物体的温度分布规律。给定一根均匀且各向同性的细杆, 长为 $L(L \geq 0)$, 假设细杆内部有热源且与周边介质有热交换, $f_0(x, t)$ 为热源强度, C 为热容, ρ 为密度, k 为传导率, $u = u(x, t)$ 描述在 t 时刻 x 位置材料的温度, 则 Dirichlet 边界条件下的一维热传导方程初边值问题为^[12-13]:

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (c \nabla u) = f, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = \psi(x), & x \in \Omega, t = 0, \\ u(0, t) = g_a, u(L, t) = g_b, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\Omega = (0, L)$, $c = \frac{k}{\rho C}$ 为热扩散项系数, $f = f_0(x, t)/C$, 初始温度为 $\psi(x)$, 边界条件为 g_a 和 g_b 。

一维热传导方程初边值问题的变分形式为: 求 $u = u(x, t) \in H^1(\Omega)$ (t 为参数), 满足

$$\begin{cases} (u_t, v) + a(u, v) = (f, v), \\ u(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (2)$$

对任意的 $v \in H_0^1(\Omega)$ 都成立。

在 $H^1(\Omega)$ 中取一 n 维子空间 V_h , 令 V_{h0} 表示 V_h 中在边界处值为 0 的函数构成的空间, 则半离散的 Galerkin 方法为: 求 $u_h(x, t) \in V_h$, 满足

$$\begin{cases} (u_{h_t}, v_h) + a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_{h0}, \\ u_h(0) = \psi_h. \end{cases} \quad (3)$$

进一步利用差分法对时间 t 离散, 得到一维热传导方程的全离散化 Galerkin 方法。

2 C-Bézier 和 H-Bézier 基函数

定义 1 在空间 $T = \text{span}\{1, \omega, \dots, \omega^{p-2}, \sin \omega, \cos \omega\}$ 上的 p 次 C-Bézier 基函数 $\{C_i^p(\omega)\}_{i=0}^p$ 为:

$$\begin{aligned} C_0^p(\omega) &= 1 - \int_0^\omega \delta_0^{p-1} C_0^{p-1}(s) ds, \\ C_i^p(\omega) &= \int_0^\omega \delta_{i-1}^{p-1} C_{i-1}^{p-1}(s) ds - \\ &\int_0^\omega \delta_i^{p-1} C_i^{p-1}(s) ds, \quad (i = 1, 2, \dots, p-1), \\ C_p^p(\omega) &= \int_0^\omega \delta_{p-1}^{p-1} C_{p-1}^{p-1}(s) ds, \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $p \geq 2, \omega \in [0, \alpha], \alpha \in (0, \pi]$,

$$C_0^1(\omega) = \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin \alpha}, \quad C_1^1(\omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \alpha},$$

$$\delta_i^p = \left(\int_0^\alpha C_i^p(\omega) d\omega \right)^{-1},$$

α 为形状参数^[8]。

定义 2 在空间 $T = \text{span}\{1, \omega, \dots, \omega^{q-2}, \sinh \omega, \cosh \omega\}$ 上的 q 次 H-Bézier 基函数 $\{H_i^q(\omega)\}_{i=0}^q$ 为:

$$\begin{aligned} H_0^q(\omega) &= 1 - \int_0^\omega \delta_0^{q-1} H_0^{q-1}(s) ds, \\ H_i^q(\omega) &= \int_0^\omega \delta_{i-1}^{q-1} H_{i-1}^{q-1}(s) ds - \\ &\int_0^\omega \delta_i^{q-1} H_i^{q-1}(s) ds, \quad (i = 1, 2, \dots, q-1), \\ H_q^q(\omega) &= \int_0^\omega \delta_{q-1}^{q-1} H_{q-1}^{q-1}(s) ds, \end{aligned} \quad (5)$$

其中: $q \geq 2, \omega \in [0, \alpha], \alpha \in (0, +\infty)$,

$$H_0^1(\omega) = \frac{\sinh(\alpha - \omega)}{\sinh \alpha}, \quad H_1^1(\omega) = \frac{\sinh \omega}{\sinh \alpha},$$

$$\delta_i^q = \left(\int_0^\alpha H_i^q(\omega) d\omega \right)^{-1},$$

α 为形状参数^[9]。

C-Bézier 和 H-Bézier 基函数都具有单位分解、端点插值、升阶等性质, 具体性质及证明见参考文献[8-9]。

定义 3 称参数曲线段

$$P(\omega) = \sum_{i=0}^p P_i C_i^p(\omega), \quad \omega \in [0, \alpha], \quad (6)$$

为一条 p 次 C-Bézier 曲线, 其中 $\alpha \in (0, \pi]$, $C_i^p(\omega)$ ($i=0, 1, \dots, p$) 为 p 次 C-Bézier 基函数, P_i ($i=0, 1, \dots, p$) 为控制顶点, α 称为全局形状参数^[8]。

图 1(a) 为 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时的二次 C-Bézier 曲线, 控制顶点为 $P_0 = (0, 2), P_1 = (0, 0), P_2 = (2, 0)$, 图 1(b) 为 $\alpha = \pi$ 时的三次的 C-Bézier 曲线, 对应的控制顶点为 $P_0 = (0, 0), P_1 = (2, 4), P_2 = (4, 4), P_3 = (6, 0)$ 。

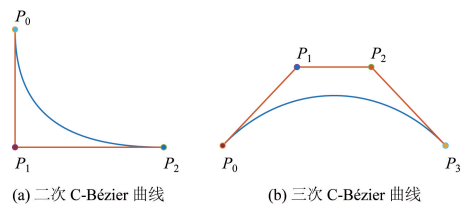


图 1 C-Bézier 曲线

Fig. 1 C-Bézier curves

定义 4 称参数曲线段

$$Q(\omega) = \sum_{i=0}^q Q_i H_i^q(\omega), \quad \omega \in [0, \alpha], \quad (7)$$

为一条 q 次 H-Bézier 曲线, 其中 $\alpha \in (0, \infty)$, $H_i^q(\omega)$ ($i=0, 1, \dots, q$) 为 q 次 H-Bézier 基函数, Q_i ($i=0, 1, \dots, q$) 为控制顶点, α 称为全局形状参数^[9]。

图 2(a)为 $\alpha=2$ 时的二次 H-Bézier 曲线,控制顶点为 $Q_0=(4,0), Q_1=(0,2), Q_2=(4,4)$,图 2(b)为 $\alpha=3$ 时的三次 H-Bézier 曲线,其控制顶点为 $Q_0=(0,0), Q_1=(\frac{3}{2},5), Q_2=(3,6), Q_3=(5,2)$ 。

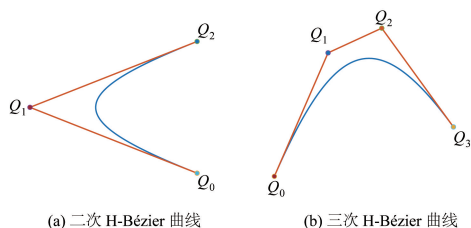


图 2 H-Bézier 曲线
Fig. 2 H-Bézier curves

C-Bézier 和 H-Bézier 基函数引入了形状参数 α , α 可以调节曲线的形状和几何性质。以 C-Bézier 基函数为例,调节区域为 Bézier 曲线到 $\alpha=\pi$ 时的 C-Bézier 曲线之间。曲线首端和末端的位置及切矢方向不随形状参数 α 的改变而改变。同时,在多段 C-Bézier 曲线进行 G^1 拼接时, α 改变不会影响曲线之间原有的连续性,为曲线曲面造型带来了便利性和灵活性。

3 以 C-Bézier 和 H-Bézier 为基函数的有限元方法

将区间 $[0, L]$ 均匀剖分为 N 个单元,步长 $h = \frac{L}{N}$,设节点为 $x_i = (i-1)h (i=1, 2, \dots, N+1)$, $E_n = [x_n, x_{n+1}] (n=1, \dots, N)$ 表示网格单元, N_b 表示有限元节点个数。令

$$V_h = \text{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_b} \in H^1(\Omega)$$

为 C-Bézier 或 H-Bézier 基函数构成的测试函数空间。

当 $p=2$ 时,二次 C-Bézier 基函数为:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1 - \cos(\alpha - \omega)}{1 - \cos \alpha}, \\ \varphi_2 &= -\frac{1 - \cos \omega + \cos \alpha - \cos(\alpha - \omega)}{1 - \cos \alpha}, \\ \varphi_3 &= \frac{1 - \cos \omega}{1 - \cos \alpha}, \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\omega \in [0, \alpha], \alpha \in (0, \pi]$ 。

当 $q=2$ 时,二次 H-Bézier 基函数为:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1 - \cosh(\alpha - \omega)}{1 - \cosh \alpha}, \\ \varphi_2 &= -\frac{1 - \cosh \omega + \cosh \alpha - \cosh(\alpha - \omega)}{1 - \cosh \alpha}, \end{aligned}$$

$$\varphi_3 = \frac{1 - \cosh \omega}{1 - \cosh \alpha}, \tag{9}$$

其中: $\omega \in [0, \alpha], \alpha \in (0, +\infty)$ 。图 3(a)为 $\alpha = \frac{\pi}{6}, p=2$ 时的 C-Bézier 基函数,图 3(b)为 $\alpha = \pi, q=2$ 时的 H-Bézier 基函数。

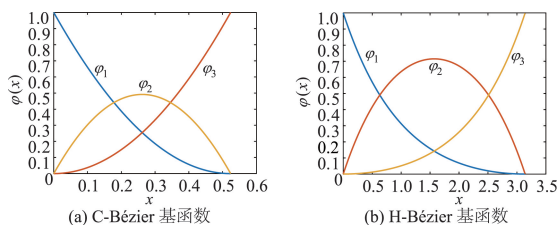


图 3 二次 C-Bézier 和 H-Bézier 基函数
Fig. 3 Quadratic C-Bézier and H-Bézier basis

做变量替换 $m = \frac{\omega}{\alpha}$, 则 $m \in [0, 1], \omega = m\alpha$, 通过仿射变换,可得任一单元 $[x_n, x_{n+1}]$ 上的二次 C-Bézier 和 H-Bézier 基函数。以 C-Bézier 基函数为例:

$$\begin{aligned} \varphi_{n1} &= \frac{1 - \cos(\frac{x_{n+1} - x}{h}\alpha)}{1 - \cos \alpha}, \\ \varphi_{n2} &= -\frac{1 - \cos(\frac{x - x_n}{h}\alpha) + \cos \alpha - \cos(\frac{x_{n+1} - x}{h}\alpha)}{1 - \cos \alpha}, \\ \varphi_{n3} &= \frac{1 - \cos(\frac{x - x_n}{h}\alpha)}{1 - \cos \alpha}, \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $x \in [x_n, x_{n+1}], \alpha \in (0, \pi]$ 。

设 $u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N_b} u_j(t) \varphi_j$, 并取 $v_h = \varphi_i (i=1, \dots, N_b)$, 得到关于 $u_1(t), \dots, u_{N_b}(t)$ 的常微分方程组:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_b} u_j'(t) \int_0^L (\varphi_j \varphi_i) dx + \sum_{j=1}^{N_b} u_j(t) \int_0^L (c \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i) dx = \int_0^L f \varphi_i dx, (i=1, \dots, N_b). \end{aligned} \tag{11}$$

用向量表示为:

$$\mathbf{M}\mathbf{X}'(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}(t), \tag{12}$$

进一步用差分法对时间 t 离散,得到全离散的 Galerkin 方法。

4 稳定性及误差分析

全离散格式是由常微分方程组(11)离散化得

到的, 因此需要讨论它的稳定性. 使用 Crank-Nicolson 格式对时间 t 进行离散:

$$\frac{1}{\tau}(u_h^{n+1} - u_h^n, v_h) + \frac{1}{2}a(u_h^{n+1} + u_h^n, v_h) = (f, v_h),$$

其中: 上标 n 表示在 $t = t_n = n\tau$ 处的近似. 取

$$v_h = u_h^{n+1} - u_h^n, f = 0,$$

得

$$\frac{1}{\tau} \|u_h^{n+1} - u_h^n\|^2 + \frac{1}{2}a(u_h^{n+1} + u_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n) = 0.$$

利用 $a(\cdot, \cdot)$ 的对称性得

$$|u_h^{n+1}|_1 \leq |u_h^n|_1 \leq \dots \leq |u_h^0|_1,$$

由 Poincaré 不等式可以证得稳定性.

由 Céa 引理^[14] 可得, 有限元的误差估计转化为插值误差估计. 当一维热传导方程半离散时, 仅对空间离散, L^2 范数误差估计为

$$\|u - u_h\| \leq C_1 h^2 \|u\|_2,$$

其中: C_1 为常数, h 为步长, 利用 Aubin-Nitche 技巧可证明之.

引理 1 设 u 和 u_h 分别为方程(1)和(3)的解, 对任意的 $t \in [0, +\infty)$, 误差估计为

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq C_2 h^2 (\|\psi\|_2 + \int_0^t \|u_t\|_2 dx),$$

其中: C_2 为常数.

引理 1 的证明参见文献[14], 对时间 t 进行离散, 由引理 1 可以得到一维热传导方程全离散化的误差估计.

5 数值算例

运用 Lagrange、C-Bézier 和 H-Bézier 基函数的有限元法求解热传导方程并比较数值解的精度. 在下述算例中, 均使用二次的基函数构成有限元方法中的试探函数与测试函数空间, 有限元节点相同, 所用网格一致.

例 1 考虑一根均匀且长度为 1 m 的细杆, 初始温度分布为 0°C , 热扩散系数 $c = 2$, 热容为 1, 细杆内部有热源, 在 t 时刻, 热源强度 $f_0(x, t) = x \cos(xt) + 2t^2 \sin(xt)$, 细杆左端保持温度 0°C , 右端温度为 $\sin t^\circ\text{C}$, 运用有限元方法求解细杆内部温度分布, 并分析误差.

其一维热传导方程的初边值问题为:

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (2 \nabla u) = x \cos(xt) + 2t^2 \sin(xt), \\ 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, 0 < x < 1, t = 0, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = \sin t, t > 0. \end{cases} \quad (13)$$

方程(13)的精确解为 $u = \sin(xt)$, 运用有限元方法, 在 $t = 2$ 时刻得到在节点处的数值解误差见表 1, 图 4(a)为步长 $h = \frac{1}{4}$, $t = 2$ 时的误差曲线图, 细杆内温度随时间的变化情况如图 4(b)所示.

表 1 方程(13)在 $t = 2$ 时刻节点处的无穷范误差
Tab. 1 Infinite norm errors at nodes of Eq. (13) for $t = 2$

Lagrange 基函数		C-Bézier 基函数	
h	$\ u - u_h\ _\infty$	α	$\ u - u_h\ _\infty$
1/4	2.829 4e-05	$\pi/6$	5.134 9e-06
1/8	1.800 4e-06	$\pi/12$	3.221 3e-07
1/16	1.136 9e-07	$\pi/24$	2.016 9e-08
1/32	7.159 2e-08	$\pi/48$	1.261 1e-09

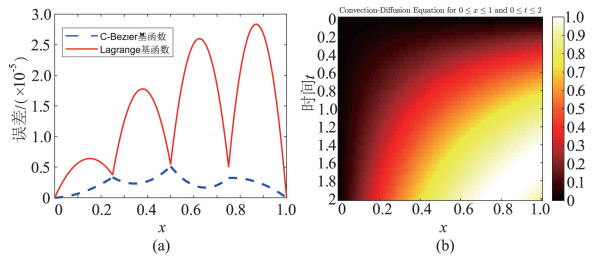


图 4 当 $h = \frac{1}{4}, t = 2$ 时, 方程(13)误差图像(a)和细杆内部温度随时间分布图(b)

Fig. 4 The error graph (a) at $h = \frac{1}{4}, t = 2$ and interior temperature distribution diagram (b) of thin rod of Eq. (13) over time

由例 1 可见, 运用 C-Bézier 基函数构成测试函数及试探函数空间, 在步长不变的情况下, 通过选取适当的形状参数 α , 此时 $\alpha = \frac{2}{3}\pi h$, 得到的数值解的精度比 Lagrange 型基函数高一个数量级, 说明 C-Bézier 基函数的有限元法对热传导过程的数值模拟效果更好.

例 2 考虑一根均匀且长为 1 m 的细杆, 初始温度分布为 0°C , 热扩散系数 c 和热容都为 1. 细杆内部有热源, 在 t 时刻, 热源强度 $f_0(x, t) = \cosh(\frac{x}{2})(2 - \frac{t}{2})$, 细杆左端温度是 $2t^\circ\text{C}$, 右端为 $2t \cosh(\frac{1}{2})^\circ\text{C}$, 运用有限元方法求解细杆内部温度分布, 并分析误差.

其一维热传导方程边值问题为

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (\nabla u) = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\left(2 - \frac{t}{2}\right), \\ 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, 0 < x < 1, t = 0, \\ u(0, t) = 2t, u(1, t) = 2t \cosh\left(\frac{1}{2}\right), t > 0. \end{cases} \quad (14)$$

方程(14)的精确解为 $u = 2t \cosh\left(\frac{x}{2}\right)$, 运用有限元方法, 在 $t = 1$ 时刻得到在节点处的数值解误差见表 2, 图 5(a) 为 $h = \frac{1}{4}, t = 1$ 时的误差图像, 细杆内温度的分布情况如图 5(b) 所示。

表 2 方程(14)在 $t = 1$ 时刻在节点处的无穷范误差

Tab. 2 Infinite norm errors at nodes of Eq. (14) for $t = 1$

Lagrange 基函数		H-Bézier 基函数	
h	$\ u - u_h\ _\infty$	α	$\ u - u_h\ _\infty$
1/4	2.445 3e-07	1/8	2.744 5e-13
1/8	1.643 9e-08	1/16	6.483 0e-14
1/16	1.071 0e-09	1/32	1.465 5e-14
1/32	6.841 1e-11	1/64	8.304 5e-14

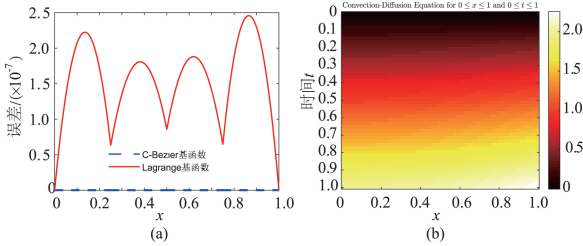


图 5 当 $h = \frac{1}{4}, t = 1$ 时, 方程(14)误差图像(a)和

细杆内部温度随时间分布图(b)

Fig. 5 The error graph (a) at $h = \frac{1}{4}, t = 1$ and interior temperature distribution diagram (b) of thin rod of Eq. (14) over time

由例 2 可见, 运用 H-Bézier 基函数构成测试函数及试探函数空间, 在步长不变的情况下, 通过选取适当的形状参数 α , 此时 $\alpha = \frac{1}{2}h$, 较传统 Lagrange 基函数, 当 h 取 1/4 或 1/8 时, 精度可提高 6 个数量级; 当 h 取 1/16 时, 精度可提高 5 个数量级; 当 h 取 1/32 时, 精度可提高 3 个数量级; 综上, 得到的数值解的精度比 Lagrange 型基函数高 3 个数量级以上, 说明 H-Bézier 基函数的有限元法对精确解的逼近效果更好。

例 3 考虑一根均匀且长为 1 m 的细杆, 初

始温度分布为 0°C , 热扩散系数 c 和热容都为 1。细杆内部有热源, 在 t 时刻, 热源强度 $f_0(x, t) = t \sin(\pi x)(2 + \pi^2 t)$, 细杆两端温度为 0°C 。运用有限元方法求解细杆内部温度分布, 并分析误差。其一维热传导方程的初边值问题为:

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (\nabla u) = t \sin(\pi x)(2 + \pi^2 t), \\ 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, 0 < x < 1, t = 0, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, t > 0. \end{cases} \quad (15)$$

方程(15)的精确解为 $u = t^2 \sin(\pi x)$, 运用有限元方法, 在 $t = 1$ 时刻得到在节点处的数值解误差见表 3, 图 6(a) 为 $h = \frac{1}{4}, t = 1$ 时的误差图像, 细杆内温度的分布情况如图 6(b) 所示。

表 3 方程(15)在 $t = 1$ 时刻在节点处的无穷范误差

Tab. 3 Infinite norm errors at nodes of Eq. (15) for $t = 1$

Lagrange 基函数		C-Bézier 基函数	
h	$\ u - u_h\ _\infty$	α	$\ u - u_h\ _\infty$
1/4	9.818 5e-05	$\pi/4$	2.147 0e-08
1/8	6.312 6e-06	$\pi/8$	8.104 0e-11
1/16	3.972 9e-07	$\pi/16$	1.252 3e-13
1/32	2.487 3e-08	$\pi/32$	9.059 4e-14

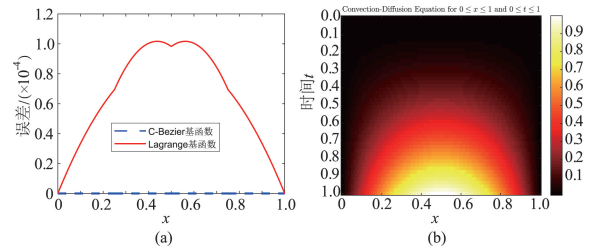


图 6 当 $h = \frac{1}{4}, t = 1$ 时, 方程(15)误差图像(a)和

细杆内部温度随时间分布图(b)

Fig. 6 The error graph (a) at $h = \frac{1}{4}, t = 1$ and interior temperature distribution diagram (b) of thin rod of Eq. (15) over time

由例 3 可见, 运用 C-Bézier 基函数构成测试函数及试探函数空间, 在步长不变的情况下, 通过选取适当的形状参数 α , 此时 $\alpha = \pi h$, 得到的数值解的精度比 Lagrange 型基函数高三个数量级以上, 说明 C-Bézier 基函数的有限元法对热传导过程的模拟效果更好。

6 总结

介绍了 C-Bézier 和 H-Bézier 基函数的定义及良好性质, 并用其构造有限元方法中的测试函数

与试探函数空间, 通过例子说明利用这两种基函数求出的数值解与精确解的误差更小, 精度更高, 证明了理论结果。

形状参数 α 的选取会影响数值解的精确度, 同时在进行误差估计时, 常数 C_1 、 C_2 的确定也非

常重要。下一步将继续研究如何选取最优的形状参数 α , 使得数值解与精确解之间的误差达到最小, 并探讨如何利用简单的方法确定常数 C_1 、 C_2 进行误差估计。

参考文献:

- [1] COURANT R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1943, 49: 1-23.
- [2] CLOUGH R. The finite element method in plane stress analysis[C]//Proceedings of the 2nd Conference on Electronic Computation of American Society of Civil Engineers, 1960: 345-378.
- [3] 冯康. 基于变分原理的差分格式[J]. 应用数学与计算数学, 1965, 2(4): 238-262.
FENG Kang. Difference scheme based on variational principle [J]. Applied Mathematics & Computational Mathematics, 1965, 2(4): 238-262.
- [4] BABUŠKA I. Error-bounds for finite element method[J]. Numerische Mathematik, 1971, 16(4): 322-333.
- [5] LI F, YI N Y. Analysis of a goal-oriented adaptive two-grid finite-element algorithm for semilinear elliptic problems [J]. Computational and Applied Mathematics, 2022, 41(3): 108.
- [6] TASSI P A, RHEBERGEN S, VIONNET C A. A discontinuous Galerkin finite element model for river bed evolution under shallow flows[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197(33/40): 2930-2947.
- [7] AL-TAWEEL A, WANG X S, YE X, et al. A stabilizer free weak Galerkin finite element method with super closeness of order two[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2021, 37(2): 1012-1029.
- [8] CHEN Q Y, WANG G Z. A class of Bézier-like curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(1): 29-39.
- [9] LYU Y G, WANG G Z, YANG X N. Uniform hyperbolic polynomial B-spline curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(6): 379-393.
- [10] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39/40/41): 4135-4195.
- [11] BHATTI M I, BRACKEN P. Solutions of differential equations in a Bernstein polynomial basis[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 205(1): 272-280.
- [12] MEZGHANI B, TOUNSI F, MASMOUDI M. Development of an accurate heat conduction model for micromachined convective accelerometers[J]. Microsystem Technologies, 2015, 21(2): 345-353.
- [13] LIU Q, MING P J, ZHAO H Y, et al. A high order control volume finite element method for transient heat conduction analysis of multilayer functionally graded materials with mixed grids[J]. Journal of Thermal Science, 2020, 29(1): 144-158.
- [14] THOMÉE V. Galerkin finite element methods for parabolic problems[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 1984: 186-187.
- [15] BADIA S, VERDUGO F, MARTÍN A F. The aggregated unfitted finite element method for elliptic problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 336: 533-553.
- [16] BAUMANN C E, ODEN J T. A discontinuous hp finite element method for convection-diffusion problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, 175(3/4): 311-341.
- [17] CHEN Zhiming, TUO Rui, ZHANG Wenlong. A finite element method for elliptic problems with observational boundary data[J]. Computational Mathematics, 2020, 38(2): 355-374.
- [18] CAO S H, CHEN L, HUANG X H. Error analysis of a decoupled finite element method for quad-curl problems[J]. Journal of Scientific Computing, 2021, 90(1): 29.

责任编辑: 郭红建