信阳师范学院学报(自然科学版)
JOURNAL OF XINYANG NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition)

薛定谔方程在Berestycki-Lions条件下正解的存在性

薛艳昉，韩建新

引用本文:
薛艳昉, 韩建新. 薛定谔方程在Berestycki-Lions条件下正解的存在性[J]. 信阳师范学院学报自然科学版, 2022, 35(1): 7-10. doi: 10.3969/j.issn.1003-0972.2022.01.002
XUE Yanfang, HAN Jianxin. Existence of Positive Solutions of Schrdinger Equation Under the Berestycki-Lions Condition[J]. Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition), 2022, 35(1): 7-10. doi: 10.3969/j.issn.1003-0972.2022.01.002

在线阅读 View online: https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2022.01.002

DOI:10.3969/j.issn.1003-0972.2022.01.002 文章编号:1003-0972(2022)01-0007-04

薛定谔方程在 Berestycki-Lions 条件下正解的存在性

薛艳昉,韩建新*

(信阳师范学院 数学与统计学院,河南 信阳 464000)

摘 要:研究了一类薛定谔方程正解的存在性问题。在径向位势下,当非线性项满足由 Berestycki-Lions 在 1983 年给出的经典条件时,利用山路引理和对称临界原理,得到了该问题的一个正解。

关键词:对称临界原理;山路引理;Berestycki-Lions 条件;Pohozaev 恒等式

中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A **开放科学(资源服务)标识码(OSID)**:

Existence of Positive Solutions of Schrödinger Equation Under the Berestycki-Lions Condition

XUE Yanfang, HAN Jianxin*

(College of Mathematics and Statistics, Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China)

Abstract: The existence of positive solutions for the Schrödinger equation with radial potential is studied. By using the mountain pass lemma and the principle of symmetric criticality, a positive solution is obtained when the nonlinear term satisfies the Berestycki-Lions condition given in 1983.

Key words: principle of symmetric criticality; mountain pass lemma; Berestycki-Lions condition; Pohozaev equality

0 引言

考虑如下薛定谔方程:

$$-\Delta u+V(x)u=g(u), x\in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

其中 $V:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是位势函数,$g(u):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是非线性项。大量的文献在不同的位势下考虑方程(1)解的存在性和多重性。现有文献中,非线性项一般满足经典的(AR)条件、单调性条件或非二次条件等,而这些条件是证明山路结构和(PS)序列有界性的关键。

1983年,BERESTYCKI 和 LIONS 在经典文献[1]中讨论方程:

$$-\Delta u=g(u), \tag{2}$$

其中非线性项 $g(s)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 且满足如下条件:

(g_1) $-\infty<\varliminf\limits_{s\to 0^+}\dfrac{g(s)}{s}\leqslant\varlimsup\limits_{s\to 0^+}\dfrac{g(s)}{s}<0$;

(g_2) $-\infty<\varlimsup\limits_{s\to\infty}\dfrac{g(s)}{s^{2^*-1}}\leqslant 0$;

(g_3) 存在 $\zeta_0>0$,使得

$$G(\zeta_0)=\int_0^{\zeta_0}g(s)\mathrm{d}s>0。$$

上述条件(g_1)~(g_3)被认为是目前为止,使得方程(2)有解的几乎最弱的条件(以下简称(BL)条件)。该条件引起了诸多学者的兴趣,被众多知名学者从各个方面进行了推广和应用(见文献[2-4])。其中,AZZOLLINI[2] 将文献[1]中的自治情形推广到了非自治的情况,即考虑方程(1)解的存在性和非存在性,其位势 V 满足下面的假设:

(V_1) $V\in C^1(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$。对任意 $x\in\mathbf{R}^n$,有 $V(x)\geqslant 0$,且在某个正测集上严格大于号成立;

(V_2) $\|(\nabla V(x),x)^+\|_{n/2}<2S$,其中 S 是 Sobolev 嵌入 $D^{1,2}(\mathbf{R}^n)\to L^{2^*}(\mathbf{R}^n)$ 的最佳常数,即

$$S=\inf_{u\in D^{1,2}\setminus\{0\}}\frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}, 2^*=\frac{2n}{n-2};$$

(V_3) $V(x)$ 径向对称,即 $V(|x|)=V(x)$;

(V_4) $\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x)=0$。

在文献[2]中,$V(x)$ 满足(V_1)~(V_4)条件,

收稿日期:2020-09-29;**修订日期**:2021-10-05;*.**通信联系人**,E-mail:xueyanfang2015@163.com;hjxin2008@163.com

基金项目:国家自然科学基金项目(11901499);信阳师范学院南湖学者青年项目(201912)

作者简介:薛艳昉(1979—),女,湖北京山人,副教授,博士,主要从事非线性分析及数理金融方面的研究。

$g(s)$ 满足$(g_1)\sim(g_3)$条件,该文献得到方程(1)解的存在性。受文献[2]的启发,本文也考虑薛定谔方程(1)解的存在性,推广了文献[2]中的相关结果。

为简便起见,在后面的叙述中,将$\int_{\mathbf{R}^n} h(x)\mathrm{d}x$简记为$\int_{\mathbf{R}^n} h(x)$。

1　预备知识

引理 1(紧嵌入)　设$H_r^1(\mathbf{R}^n)=\{u\in H^1(\mathbf{R}^n):u(|x|)=u(x)\}$,则从$H_r^1(\mathbf{R}^n)$到$L^p(\mathbf{R}^n)(2<p<2^*)$的嵌入是紧的。

引理 2(山路引理)　设 E 是实的 Banach 空间,S 是 E 的闭子集,并且将 E 分成 E_1、E_2 两个不同的连通分支。如果 $I\in C^1(E,\mathbf{R})$ 满足下面的山路几何结构:

(i) $0\in E_1$ 并且存在 $\rho>0,\alpha>0$,使得 $I|_S\geqslant\alpha>0$;

(ii) 存在 $e\in E_2$,$\|e\|>\rho$,使得 $I(e)<0$,那么存在序列$\{u_n\}\subset E$ 满足:

$$I(u_n)\to c\geqslant\alpha,I'(u_n)\to 0,\tag{3}$$

其中 $c=\inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\sup\limits_{t\in[0,1]}I(\gamma(t))$,$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],E):\gamma(0)=0,\gamma(1)=e\}$。满足(3)的序列$\{u_n\}$称为泛函 I 的(PS)序列。

2　主要结果及证明

定理 1　若 $g(s)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 且满足(g_1)和(g_2),$V(x)$满足条件$(V_1)\sim(V_3)$以及

(V_g) 存在 $\zeta>0$,使得

$$\varliminf_{x\to+\infty}\left(G(\zeta)-\frac{1}{2}V(x)\zeta^2\right)>0,$$

则方程(1)存在正解。

证明　分五步来完成定理 1 的证明。

第一步,修正非线性项 $g(s)$。

借鉴文献[5]中的思想,对函数 g 做如下的修正:令 $s_0=\min\{s\in[\zeta_0,+\infty):g(s)=0\}$,若对任意 $s\geqslant\zeta_0$,有 $g(s)\neq 0$,则令$s_0=+\infty$。构造函数$\tilde{g}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 如下:

$$\tilde{g}(s)=\begin{cases}g(s), & s\in[0,s_0],\\ 0, & s\in\mathbf{R}\backslash[0,s_0],\end{cases}\tag{4}$$

则函数$\tilde{g}$满足g的所有条件。由强极大值原理,在$\tilde{g}$下问题(1)的正解也是 g 之下问题(1)的正解。事实上,$\tilde{g}$下问题(1)的正解满足 $0\leqslant u\leqslant s_0$,故$\tilde{g}(u)=g(u)$。故而可以假设 g 由式(4)定义。

当 $s\geqslant 0$ 时,令

$g_1(s)=(g(s)+ms)^+$,

$g_2(s)=g_1(s)-g(s)$。

当 $s<0$ 时,$g_1(s)=g_2(s)=0$,则 $g_1\geqslant 0$,$g_2\geqslant 0$ 且

$$\lim_{s\to 0}\frac{g_1(s)}{s}=0,\tag{5}$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{g_1(s)}{|s|^{2^*-1}}=0,\tag{6}$$

$$g_2(s)\geqslant ms,\forall s\geqslant 0。\tag{7}$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{g_2(s)}{|s|^{2^*-1}}=0。\tag{8}$$

根据式(5)～式(8)知,对任意 $\delta>0$,存在 $C_\delta>0$ 使得

$$g_1(s)\leqslant C_\delta|s|^{2^*-1}+\delta g_2(s),\tag{9}$$

$$G_2(s)\geqslant\frac{1}{2}ms^2,\tag{10}$$

$$G_1(s)\leqslant\frac{C_\delta}{2^*}|s|^{2^*}+\delta G_2(s),\tag{11}$$

其中 $G_i(s)=\int_0^s g_i(t)\mathrm{d}t,i=1,2$。

第二步,证明泛函 I 满足山路几何结构(i)。

根据式(10)、式(11)和 Sobolev 不等式知,

$$\begin{aligned}I(u)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)-\int_{\mathbf{R}^n}G(u)\geqslant\\&\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla u|^2+(1-\delta)\frac{m}{2}\int_{\mathbf{R}^n}u^2-\\&\frac{C_\delta}{2^*}\int_{\mathbf{R}^n}u^{2^*}\geqslant\\&\min\left\{\frac{1}{2},(1-\delta)\frac{m}{2}\right\}\|u\|^2-\\&\frac{C_\delta}{2^*}S^{-\frac{2^*}{2}}\|\nabla u\|_2^{2^*},\end{aligned}$$

其中 $0<\delta<1$。由上述不等式知,存在足够小的 $\rho>0$,当 $\|u\|\leqslant\rho$,$u\neq 0$ 时,有 $I(u)\geqslant c>0$,从而得到泛函 I 满足山路几何结构(i)。

第三步,证明泛函 I 满足山路几何结构(ii)。

令 $\theta>0$ 足够大,$\bar{\zeta}=\zeta\left(\frac{\cdot}{\theta}\right)$,则由 Fatou 引理,

$$\begin{aligned}\varlimsup_{x\to\infty}I(\bar{\zeta})=&\varlimsup_{x\to\infty}I\left(\zeta\left(\frac{x}{\theta}\right)\right)=\\&\varlimsup_{x\to\infty}\left(\frac{\theta^{n-2}}{2}\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla\zeta|^2+\frac{\theta^n}{2}\int_{\mathbf{R}^n}V(\theta x)\zeta^2-\right.\end{aligned}$$

$$\theta^n\int_{\mathbf{R}^n}G(\zeta))\leqslant$$

$$\frac{\theta^{n-2}}{2}\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla\zeta|^2-$$

$$\theta^n(\int_{\mathbf{R}^n}\lim_{x\to+\infty}(G(\zeta)-\frac{1}{2}V(\theta x)\zeta^2))。$$

取 $e=\bar{\zeta}$，根据(V_g)知，当 θ 足够大时，得到泛函 I 满足山路几何结构(ii)。

第四步，证明 I 的每个(PS)序列有界。

定义新的泛函 $J:H_r^1(\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}$ 如下：

$$J(u)=\frac{n-2}{2}\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla u|^2+\frac{n}{2}\int_{\mathbf{R}^n}V(x)u^2+$$

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}(\nabla V(x),x)u^2-n\int_{\mathbf{R}^n}G(u)。$$

借助文献[6-7]中的证明思想，构造 Pohozaev 型的(PS)序列。定义映射 $\psi:\mathbf{R}\times H_r^1(\mathbf{R}^n)\to H_r^1(\mathbf{R}^n)$ 如下：

$$\psi(\theta,u)(x)=u(\mathrm{e}^{-\theta}x),$$

则复合函数 $I\circ\psi$ 为

$$I(\psi(\theta,u))=\frac{\mathrm{e}^{(n-2)\theta}}{2}\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla u|^2+$$

$$\frac{\mathrm{e}^{n\theta}}{2}\int_{\mathbf{R}^n}V(\mathrm{e}^{\theta}x)u^2-\mathrm{e}^{n\theta}\int_{\mathbf{R}^n}G(u)。$$

由非线性项 $g(s)$ 的增长性条件可知，$I\circ\psi$ 在 $\mathbf{R}\times H_r^1(\mathbf{R}^n)$ 上连续可微。定义道路族 $\tilde{\Gamma}=\{\tilde{\gamma}\in C([0,1],\mathbf{R}\times H_r^1(\mathbf{R}^n)):\tilde{\gamma}(0)=(0,0),(I\circ\psi)(\tilde{\gamma}(1))<0\}$。

因为 $\Gamma=\{\psi\circ\tilde{\gamma}:\tilde{\gamma}\in\tilde{\Gamma}\}$，所以 I 和 $I\circ\psi$ 的山路值相等(见文献[6])，即

$$\tilde{c}=\inf_{\tilde{\gamma}\in\tilde{\Gamma}}\sup_{\tau\in[0,1]}(I\circ\psi)(\tilde{\gamma}(\tau))=c。$$

通过计算可知，对任意$(e,u)\in\mathbf{R}\times H_r^1(\mathbf{R}^n)$，有

$$(I\circ\psi)'(\theta_n,u_n)[e,u]=$$

$$I'(\psi(\theta_n,u_n))[\psi(\theta_n,u)]+$$

$$J(\psi(\theta_n,u_n))e。$$

令 $v_n=\psi(\theta_n,u_n)$，则类似文献[6-7]可得，

$$I(v_n)\to c,I'(v_n)\to 0,J(v_n)\to 0,$$

即$\{v_n\}$是 I 在临界水平 c 处的 Pohozaev 型(PS)序列，也就是

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}(|\nabla v_n|^2+V(x)v_n^2)-\int_{\mathbf{R}^n}G(v_n)=c+o_n(1),\tag{12}$$

$$\langle I'(v_n),v_n\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}(|\nabla v_n|^2+V(x)v_n^2)-\int_{\mathbf{R}^n}g(v_n)v_n=o_n(1),\tag{13}$$

并且

$$\frac{n-2}{2}\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla v_n|^2+\frac{n}{2}\int_{\mathbf{R}^n}V(x)v_n^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}(\nabla V(x),x)v_n^2-n\int_{\mathbf{R}^n}G(v_n)=o_n(1)。\tag{14}$$

由 Hölder 不等式、(V_2)和 Sobolev 不等式得

$$\int_{\mathbf{R}^n}(\nabla V(x),x)v_n^2\leqslant$$

$$\|(\nabla V(x),x)^+\|_{n/2}(\int_{\mathbf{R}^n}v_n^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}}<$$

$$2S(\int_{\mathbf{R}^n}v_n^{2^*})^{\frac{n-2}{n}}\leqslant 2\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla v_n|^2,$$

故存在较小的常数 $\beta>0$，使得

$$\int_{\mathbf{R}^n}(\nabla V(x),x)v_n^2\leqslant(2-\beta)\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla v_n|^2。\tag{15}$$

通过计算式(12)$-\frac{1}{n}\times$式(14)，并将式(15)代入得

$$c+o_n(1)=\frac{1}{n}\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla v_n|^2-$$

$$\frac{1}{2n}\int_{\mathbf{R}^n}(\nabla V(x),x)v_n^2\geqslant$$

$$\frac{\beta}{2n}\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla v_n|^2,$$

故存在常数 $C_1>0$ 使得

$$\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla v_n|^2\leqslant C_1。\tag{16}$$

再由 Sobolev 嵌入知，存在常数 $C_2>0$ 使得

$$\int_{\mathbf{R}^n}v_n^{2^*}\leqslant C_2。$$

由式(13)得

$$\int_{\mathbf{R}^n}g(v_n)v_n=\int_{\mathbf{R}^n}(|\nabla v_n|^2+V(x)v_n^2)\geqslant 0。$$

由上式再结合式(9)得

$$\int_{\mathbf{R}^n}g_2(v_n)v_n\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}g_1(v_n)v_n\leqslant$$

$$C_\delta\int_{\mathbf{R}^n}|v_n|^{2^*}+\delta\int_{\mathbf{R}^n}g_2(v_n)v_n,$$

从而有

$$(1-\delta)\int_{\mathbf{R}^n}g_2(v_n)v_n\leqslant C_\delta\int_{\mathbf{R}^n}|v_n|^{2^*}\leqslant$$

$$C_\delta C_2。$$

再由式(7)得

$$m\int_{\mathbf{R}^n} v_n^2 \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} g_2(v_n)v_n \leqslant \frac{C_\delta C_2}{1-\delta}。\tag{17}$$

由式(16)、式(17) 知，I 的每个(PS) 序列在 $H_r^1(\mathbf{R}^n)$ 中有界，这样就完成了第四步的证明。

第五步，证明方程(1) 有一个非平凡解。

因为 I 具有旋转不变性，所以由对称临界原理知，I 限制在 $H_r^1(\mathbf{R}^n)$ 上的临界点也是 I 在全空间 $H^1(\mathbf{R}^n)$ 上的临界点。由第二步和第三步的证明，结合引理2知，泛函 I 存在(PS) 序列。要得到方程(1) 的解，只需要证明任意(PS) 序列 $\{v_n\}$ 存在收敛的子列即可。

事实上，由第四步的证明知，I 的每个(PS) 序列有界，故存在弱收敛的子列，不妨仍记为 $\{v_n\}$，即存在 $v \in H_r^1(\mathbf{R}^n)$，使得 $v_n \rightharpoonup v$ 于 $H_r^1(\mathbf{R}^n)$。又因为嵌入 $H_r^1(\mathbf{R}^n) \to L^p(\mathbf{R}^n)(2 < p < 2^*)$ 是紧的，所以 $v_n \to v$ 于 $L^p(\mathbf{R}^n)$。最后，由非线性项满足的控制条件，可以证明 $\{v_n\}$ 存在收敛的子列。由此，可以得到非平凡解的存在性，再由极大值原理，可得正解的存在性。证毕。

注记 1　与文献[2] 比较，文中位势函数和非线性项满足的条件不同。文献[2] 中，在径向对称的条件下，通过文献[8] 中的单调技巧，得到(PS) 序列的有界性，由 Strauss 引理得到紧性，从而得到正解。此处，借助 Pohozaev 恒等式，利用山路引理和对称临界原理，得到正解的存在性。

注记 2　由文献[5](第 2.2 部分) 知，此处所给的关于 g 的条件是使得问题(1) 有解的几乎最弱的条件。

3　结束语

关于 Berestycki-Lions 条件下的薛定谔方程的可解性还有很多值得思考的问题，例如：在其他的位势下，如强制位势、周期位势等，是否也能考虑该问题？本文针对的是次临界增长的(BL) 条件，对临界增长的情形，是否有类似结论？此外，是否可以类似文献[9-11]，针对拟线性薛定谔方程考虑(BL) 条件？这些都值得我们进一步地思考。

参考文献：

[1]　BERESTYCKI H, LIONS P L. Nonlinear scalar field equations, II: existence of infinitely many solutions[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1983, 82(4): 347-375.

[2]　AZZOLLINI A, POMPONIO A. On the Schrodinger equation in $\mathbf{R}^n$ under the effect of a general nonlinear term[J]. Indiana University Mathematics Journal, 2009, 58(3): 1361-1378.

[3]　JEANJEAN L, TANAKA K. A positive solution for a nonlinear Schrödinger equation on $\mathbf{R}^n$[J]. Indiana University Mathematics Journal, 2005, 54(2): 443-464.

[4]　JEANJEAN L, TANAKA K. A remark on least energy solutions in $\mathbf{R}^n$[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2003, 131(8): 2399-2408.

[5]　BERESTYCKI H, LIONS P L. Nonlinear scalar field equations, I: existence of a ground state[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1983, 82(4): 313-345.

[6]　JEANJEAN L. Existence of solutions with prescribed norm for semilinear elliptic equations[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1997, 28(10): 1633-1659.

[7]　YIN Lifeng, WU Xingping, TANG Chunlei. Ground state solutions for an asymptotically 2-linear Schrödinger-Poisson system[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 87: 7-12.

[8]　JEANJEAN L. On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer-type problem set on $\mathbf{R}^n$[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 1999, 129(4): 787-809.

[9]　XUE Yanfang, TANG Chunlei. Ground state solutions for asymptotically periodic quasilinear Schrödinger equations with critical growth[J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2018, 17(3): 1121-1145.

[10]　XUE Yanfang, TANG Chunlei. Existence of a bound state solution for quasilinear Schrödinger equations[J]. Advances in Nonlinear Analysis, 2017, 8(1): 323-338.

[11]　张萍，韩建新. 一类拟线性薛定谔方程解的存在性[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2019, 32(3): 352-356.
ZHANG Ping, HAN Jianxin. Existence of solutions for a class of quasilinear Schrödinger equations[J]. Journal of Xinyang Normal University(Natural Science Edition), 2019, 32(3): 352-356.

责任编辑：郭红建