



## 基于L-稳定单步多级块方法的多导体传输线时域响应分析

叶婧, 徐鸣, 王永, 李博文, 张磊, 奕仲飞

引用本文:

叶婧, 徐鸣, 王永, 李博文, 张磊, 奕仲飞. 基于L-稳定单步多级块方法的多导体传输线时域响应分析[J]. 信阳师范学院学报自然科学版, 2021, 34(4): 639-644,697. doi: 10.3969/j.issn.1003-0972.2021.04.022

YE Jing, XU Ming, WANG Yong, LI Bowen, ZHANG Lei, YI Zhongfei. Time Domain Response Analyses of Multiconductor Transmission Lines Using L-Stable Single Step Multistage Block Method[J]. *Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition)*, 2021, 34(4): 639-644,697. doi: 10.3969/j.issn.1003-0972.2021.04.022

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2021.04.022>

### 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

#### 斜入射时网格法在吸波材料吸波机理研究中的应用

Application of the Mesh Method on the Mechanism of Absorbing Materials at the Oblique Incidence

信阳师范学院学报自然科学版, 2019, 32(3): 478-481. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2019.03.025>

#### 隔离层掺杂纳米稀土氧化物的Salisbury屏优化设计

Optimized Design of Salisbury Screen Doped with Nanometer Rare Earth Oxide

信阳师范学院学报自然科学版, 2021, 34(2): 283-286. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2021.02.019>

#### 基于削峰尾插和几何级数压扩变换的 OFDM 时域信号压缩算法

The OFDM Time Domain Signal Compression Algorithm Based on Clipping with Tail Plug (CTP) and Geometric Series Companding (GSC)

信阳师范学院学报自然科学版, 2016(1): 99-103. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2016.01.024>

#### 基于Burton-Miller边界元法的不同类型单元计算精度对比

Comparison of Different Types of Boundary Elements Based on Burton-Miller Method

信阳师范学院学报自然科学版, 2017, 30(2): 331-335. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2017.02.032>

#### 弹性地基不可伸长梁的3次超谐波共振响应分析

Analysis of the Third Superharmonic Resonance of Inextensional Beams on Elastic Foundation

信阳师范学院学报自然科学版, 2016, 29(3): 471-475. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0972.2016.03.037>

DOI: 10.3969/j.issn.1003-0972.2021.04.022

文章编号: 1003-0972(2021)04-0639-06

# 基于 L-稳定单步多级块方法的多导体传输线时域响应分析

叶婧<sup>1</sup>, 徐鸣<sup>1</sup>, 王永<sup>2\*</sup>, 李博文<sup>3</sup>, 张磊<sup>1</sup>, 奕仲飞<sup>1</sup>

(1. 三峡大学 电气与新能源学院, 湖北 宜昌 443002; 2. 国网上海市电力公司 特高压换流站分公司, 上海 201413; 3. 国网四川省电力公司内江供电公司, 四川 内江 641000)

**摘要:** 针对传统时域有限差分(FDTD)格式在间断解处的非物理振荡问题, 将 L-稳定单步多级块方法应用于多导体传输线的时域瞬态响应分析中, 施加边界条件时, 为避免对系统状态方程的系数矩阵反复求逆, 采用更为一般的 Sherman-Morrison 公式, 求解施加边界条件后的系数矩阵逆矩阵, 分别对均匀无损多导体传输线和非均匀有损多导体传输线进行数值仿真, 并与 FDTD 算法进行对比, 结果表明, 单步多级块方法可以有效地抑制数值振荡, 且不受时域仿真步长的限制。

**关键词:** 多导体传输线; 单步多级块方法; 二次电缆; 电磁干扰

中图分类号: TM63; TN702

文献标识码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Time Domain Response Analyses of Multiconductor Transmission Lines Using L-Stable Single Step Multistage Block Method

YE Jing<sup>1</sup>, XU Ming<sup>1</sup>, WANG Yong<sup>2\*</sup>, LI Bowen<sup>3</sup>, ZHANG Lei<sup>1</sup>, YI Zhongfei<sup>1</sup>

(1. College of Electrical Engineering and New Energy, China Three Gorges University, Yichang 443002, China; 2. UHV Converter Station Branch of State Grid Shanghai Municipal Electric Power Company, Shanghai 201413, China; 3. Neijiang Power Supply Company of State Grid Sichuan Electric Power Company, Neijiang 641000, China)

**Abstract:** In order to solve the non-physical oscillation problem of the traditional finite difference time domain(FDTD) scheme at the discontinuous solution, the L-stable single step multistage block method is proposed to analyze the time domain transient response of multiconductor transmission lines. In order to avoid the repeated inversion of the coefficient matrix of the system state equation when the boundary conditions are imposed, the more general Sherman-Morrison formula is used to solve the inverse matrix of the coefficient matrix after the boundary conditions are applied. This method is used to simulate uniform lossless multiconductor transmission lines (MTLs) and non-uniform lossy MTLs, and its simulation result is compared with the results given by FDTD algorithm. The results showed that the single step multistage block method can effectively suppress the numerical oscillation and is not limited by step size of simulation in time domain.

**Key words:** multiconductor transmission line; single step multistage block method; secondary cable; electromagnetic interference

## 0 引言

在高速互连系统中,具有一定长度按照某种位置关系布置的两根导线构成了传输线,作为高速电路中的基本电路元件,保证信号在传输过程中的完整性是对传输线的基本要求,但是由于高速电路中

信号的频率很高,导致由线间耦合电感和耦合电容等内在因素造成的线束串扰问题变得十分严重,因此对多导体传输线(multiconductor transmission lines, MTLs)的时域响应求解显得十分重要<sup>[1-4]</sup>。目前对于多导体传输线时域瞬态响应的研究成果十分丰富,常见的方法包括基于时域有限差分(finite

收稿日期: 2021-02-25; 修订日期: 2021-07-25; \* 通信联系人, E-mail: yejing2000310@163.com; yongwang2015wy@163.com

基金项目: 国家自然科学基金项目(52007103)

作者简介: 叶婧(1986-), 女, 湖北武汉人, 讲师, 博士, 主要从事大规模新能源接入后电力系统运行与控制等研究。

difference time domain, FDTD) 的方法<sup>[5-7]</sup>、Bergeron 方法<sup>[8]</sup>、精细积分法<sup>[9]</sup>以及数值拉氏逆变换等,但是由于 FDTD 计算过程中采用的是中心差分,在间断解处会产生非物理振荡问题,即虚拟的数值振荡现象.除 FDTD 以外,文献[8]将传统的 Bergeron 方法进行改进,得到了适用于频变参数多导体传输线的改进 Bergeron 模型.文献[10]利用线性多步法建立了可以和集总参数相容的多导体传输线模型,解决了当传输线含集总参数的网络分支时 FDTD 无法直接计算的问题.文献[11]和文献[12]在将有限元方法应用到多导体传输线的时域瞬态响应分析中进行了有益的讨论,有限元方法能够解决 FDTD 所不能解决的数值振荡现象.文献[13]结合精细积分方法提出了一种计算非均匀传输线电磁暂态过程的时域方法,该方法不受时间稳定性条件的限制.文献[14]采用通量分裂技术,根据特征值正负采用不同的差分格式对空间偏微分进行近似,克服了传统 FDTD 格式和 Lax-Wendroff 格式在间断解处的非物理振荡问题,但存在问题的是算法的整体精度不高.概括起来,现有的时域分析方法主要面临的问题是:1)不能够有效地抑制数值振荡问题;2)时域仿真的步长受到空间离散步长的限制;3)传输线的边界条件改变后需要重新形成状态空间模型.

本文从数值积分的角度出发,将具有 L-稳定的单步多级方法应用到求解多导体传输线的时域瞬态响应,由于 L-稳定的方法具有阻尼特性或能量耗散特性,因此该单步多级方法能够避免数值振荡现象.为了避免求解过程中对状态方程的系数矩阵反复求逆,采用更为一般的 Sherman-Morrison 公式求解施加边界条件后的系数矩阵的逆矩阵,提高了模型的适应性、减少了计算量.算例结果表明,该方法能有效抑制在间断解处的非物理振荡现象,计算效率高,并且该方法不受时域仿真步长的稳定条件限制.

### 1 多导体传输线的电路模型

通常采用具有分布参数非均匀有损传输线,对信号互连线进行数学建模,根据经典电路理论,截取信号传播方向上的距离微元  $\Delta x$  作为研究对象,图 1 为两根传输线的集总参数等效电路模型.根据基尔霍夫定律,当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,

$$-\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} = R_{11}i_1(x,t) + L_{11}\frac{\partial i_1(x,t)}{\partial t} +$$

$$M_{12}\frac{\partial i_2(x,t)}{\partial t}, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} = R_{22}i_2(x,t) + L_{22}\frac{\partial i_2(x,t)}{\partial t} +$$

$$M_{21}\frac{\partial i_1(x,t)}{\partial t}, \tag{2}$$

$$-\frac{\partial i_1(x,t)}{\partial x} = g_{11}u_1(x,t) + g_{12}(u_1(x,t) -$$

$$u_2(x,t)) + C_{11}\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} +$$

$$C_{12}\frac{\partial (u_1(x,t) - u_2(x,t))}{\partial t}, \tag{3}$$

$$-\frac{\partial i_2(x,t)}{\partial x} = g_{22}u_2(x,t) + g_{21}(u_2(x,t) -$$

$$u_1(x,t)) + C_{22}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} +$$

$$C_{21}\frac{\partial (u_2(x,t) - u_1(x,t))}{\partial t}. \tag{4}$$

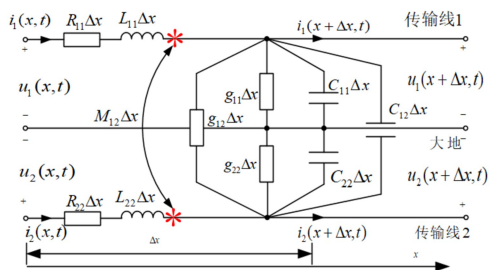


图 1 两根传输线的集总参数等效电路模型

Fig. 1 Lumped parameter equivalent circuit model of two transmission lines

将式(1)~(4)整理成如式(5)的矩阵形式:

$$\begin{cases} -\frac{\partial \mathbf{u}(x,t)}{\partial x} = \mathbf{R}\mathbf{i}(x,t) + \mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{i}(x,t)}{\partial t}, \\ -\frac{\partial \mathbf{i}(x,t)}{\partial x} = \mathbf{G}\mathbf{u}(x,t) + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}(x,t)}{\partial t}. \end{cases} \tag{5}$$

式中:  $\mathbf{u}(x,t) = [u_1(x,t) \quad u_2(x,t)]^T$ ,  $\mathbf{i}(x,t) = [i_1(x,t) \quad i_2(x,t)]^T$ ,  $\mathbf{u}(x,t)$  和  $\mathbf{i}(x,t)$  分别表示两导体传输线上的电压和电流向量;  $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{L}$ 、 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{C}$  分别表示两导体传输线单位长度的电阻、电感、电导和电容矩阵,其形式如下:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} + g_{12} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{22} + g_{21} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & M_{12} \\ M_{21} & L_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{22} + C_{21} \end{bmatrix}.$$

其中:对于对称布置的多导体传输线有耦合电导  $g_{12} = g_{21}$ , 耦合电感  $M_{12} = M_{21}$ , 耦合电容  $C_{12} = C_{21}$ .

从上述推导可知,对于三根及以上的多导体传输线的数学模型和式(5)具有同样的形式,只是相应 RLGC 矩阵的维数不同而已.

## 2 多导体传输线的空间半离散数值计算模型

多导体传输线的数学模型是双曲偏微分方程,为了能够在时域上求解多导体传输线的暂态响应,必须在空间上进行半离散.文中采用电压波和电流波在空间传播方向上间隔取点的方式,如图2所示.

首先,将长度为  $l$  的多导体传输线在空间上划分为  $M$  等份,则空间离散步长为  $\Delta x = l/M$ ,在传输线始末端分别采用前向差分和后向差分近似,对于中间离散点  $k (k = 1, 2, \dots, M-1)$  处,采用中心差分对电压波和电流波对空间变量  $x$  的偏导数近似.

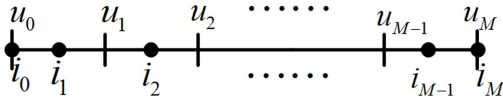


图2 传输线空间离散模型

Fig. 2 Transmission line spatial discrete model

经上述空间半离散后得到传输线时域仿真模型如下:

$$\frac{du_k(t)}{dt} = -\mathbf{C}^{-1} \frac{i_k(t) - i_{k-1}(t)}{2\Delta x} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}u_k(t), \quad (6)$$

$$\frac{di_k(t)}{dt} = -\mathbf{L}^{-1} \frac{u_{k+1}(t) - u_k(t)}{2\Delta x} - \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}i_k(t). \quad (7)$$

式中:  $u_k(t) = u(k\Delta x, t)$ ;  $i_k(t) = i[(k-0.5)\Delta x, t]$ ,  $k = 1, 2, \dots, M-1$ .

在传输线的两端分别采用下列的计算公式:

$$\frac{du_M(t)}{dt} = -\mathbf{C}^{-1} \frac{i_M(t) - i_{M-1}(t)}{\Delta x} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}u_M(t), \quad (8)$$

$$\frac{di_0(t)}{dt} = -\mathbf{L}^{-1} \frac{u_1(t) - u_0(t)}{\Delta x} - \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}i_0(t). \quad (9)$$

将式(6)~(9)整理成如式(10)的矩阵形式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mathbf{H}x + f(x, t), 0 < t \leq T, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (10)$$

式中:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{11} = \text{diag}(\underbrace{-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}, \dots, -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}}_M),$$

$$\mathbf{H}_{22} = \text{diag}(\underbrace{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}, \dots, -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}}_M),$$

$$\mathbf{H}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & -\mathbf{C}^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{C}^{-1} & -\mathbf{C}^{-1} \\ & & & & & \mathbf{C}^{-1} \\ & & & & & & \mathbf{C}^{-1} \\ & & & & & & & \mathbf{C}^{-1} \\ & & & & & & & & \mathbf{C}^{-1} \\ & & & & & & & & & \mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{L}^{-1}}{\Delta x} & & & & \\ \frac{\mathbf{L}^{-1}}{2\Delta x} & -\frac{\mathbf{L}^{-1}}{2\Delta x} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{\mathbf{L}^{-1}}{2\Delta x} & -\frac{\mathbf{L}^{-1}}{2\Delta x} \\ & & & & & \frac{\mathbf{L}^{-1}}{2\Delta x} & -\frac{\mathbf{L}^{-1}}{2\Delta x} \\ & & & & & & \frac{\mathbf{L}^{-1}}{2\Delta x} & -\frac{\mathbf{L}^{-1}}{2\Delta x} \\ & & & & & & & \frac{\mathbf{L}^{-1}}{2\Delta x} & -\frac{\mathbf{L}^{-1}}{2\Delta x} \\ & & & & & & & & \frac{\mathbf{L}^{-1}}{2\Delta x} & -\frac{\mathbf{L}^{-1}}{2\Delta x} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = [\underbrace{u_1, u_2, \dots, u_M}_M, \underbrace{i_0, i_1, \dots, i_{M-1}}_M]^T,$$

$$f(\mathbf{x}, t) =$$

$$[\underbrace{0, \dots, 0, -\mathbf{C}^{-1}i_M/\Delta x}_M, \underbrace{\mathbf{L}^{-1}u_0/\Delta x, 0, \dots, 0}_M]^T.$$

状态变量  $x_0$  是  $t = t_0$  时刻状态向量  $x$  的初始值,  $T$  是总的仿真时间.下面将采用 L-稳定单步块方法求解多导体传输线的时域暂态响应.

## 3 L-稳定单步多级块方法求解多导体传输线的时域响应

采用 L-稳定单步块方法离散方程(10)得到如下代数方程<sup>[15]</sup>:

$$\mathbf{X} = \mathbf{e} \otimes x_k + h\mathbf{d} \otimes \dot{x}_k + h(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})\mathbf{X} + h(\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_m)\mathbf{f}_s, \quad (11)$$

式中:  $h$  为时间步长,  $\otimes$  表示 Kronecker 积,  $\dot{x}_k$  为  $x_k$  的一阶导数(状态变量  $x$  在  $t = k$  时刻的近似值),  $m$  为向量  $x$  的维数,  $\mathbf{e}$  为一个组成元素均为 1

的  $s$  维列向量,  $\mathbf{I}_m$  为  $m$  维的单位矩阵,  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{d}$  是单步  $s$  级块方法采用相应网格分布的系数矩阵, 且有

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_k + c_1 h) \\ \mathbf{x}(t_k + c_2 h) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t_k + c_s h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{x}}_s \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{f}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t_k + c_1 h, \tilde{\mathbf{x}}_1) \\ \mathbf{f}(t_k + c_2 h, \tilde{\mathbf{x}}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(t_k + c_s h, \tilde{\mathbf{x}}_s) \end{bmatrix}.$$

显然, 经 L-稳定单步块方法离散后得到的代数方程式(11)经整理后得到如下的代数方程组:

$$\mathbf{J}\mathbf{X} = \mathbf{F}, \tag{12}$$

式中:  $\mathbf{J} = (\mathbf{I}_s \otimes \mathbf{I}_m) - h(\mathbf{B} \otimes \mathbf{H})$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{x}_k + h\mathbf{d} \otimes \dot{\mathbf{x}}_k + h(\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_m)\bar{\mathbf{f}}_s$ .

求解方程(12)通常采用直接法进行高斯消元求解, 考虑到状态空间方程式(10)是一个高维的稀疏矩阵且矩阵具有很好的块特征, 因此有必要具体研究如何实现雅克比矩阵  $\mathbf{J}$  的稀疏三角分解:

$$\mathbf{J}^{-1} = (\mathbf{I}_s \otimes \mathbf{I}_m) - h^{-1}(\mathbf{B}^{-1} \otimes \mathbf{H}^{-1}).$$

单步  $s$  级块方法的系数矩阵  $\mathbf{B}$  是一个满秩矩阵, 因此其逆矩阵是存在. 单步  $s$  级块方法采用均匀网格分布时的系数矩阵  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{d}$  的值见附录所示.

考虑到传输线的两端边界条件, 即

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0(t) = \mathbf{u}_s(t) - \mathbf{i}_0(t)\mathbf{Z}_s, \\ \mathbf{i}_M = \mathbf{G}_L \mathbf{u}_M. \end{cases} \tag{13}$$

式中:  $\mathbf{Z}_s$  是多导体传输线首端激励的内阻抗矩阵,  $\mathbf{G}_L$  是多导体传输线末端负载的导纳矩阵. 加入边界条件式(13)后就需要对式(10)中的状态方程矩阵的某些元素进行修正, 为了避免反复求逆矩阵, 在已知  $\mathbf{H}^{-1}$  的条件下考虑多导体传输线边界条件后的新状态系数矩阵的逆矩阵, 采用更为一般的 Sherman-Morrison 公式<sup>[16]</sup>求解即

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} + \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\mu}_i \mathbf{v}_i^T)^{-1} = \\ \mathbf{H}^{-1} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{H}^{-1}, \end{aligned} \tag{14}$$

式中:  $\boldsymbol{\mu}_i$ ,  $\mathbf{v}_i$  是与矩阵  $\mathbf{H}$  同维的列向量;  $\boldsymbol{\mu}_i \mathbf{v}_i^T$  是对状态方程矩阵  $\mathbf{H}$  的进行一次秩 1 修正.

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_i], \quad \mathbf{u}_i (i \in (1, 2, \dots, k)), \tag{15}$$

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_i], \quad \mathbf{w}_i (i \in (1, 2, \dots, k)), \tag{16}$$

$$\mathbf{R} = \text{diag}(\mathbf{r}_j), \quad j \in (1, 2, \dots, k), \tag{17}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i = \boldsymbol{\mu}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mathbf{w}_j^T \mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\mu}_j}{\mathbf{r}_j} \mathbf{u}_j, \\ \mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mathbf{v}_j^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{u}_j}{\mathbf{r}_j} \mathbf{w}_j, \end{cases} \quad i \in (1, 2, \dots, k), \tag{18}$$

$$\mathbf{r}_j = 1 + \mathbf{v}_j^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{u}_j, \quad j \in (1, 2, \dots, k). \tag{19}$$

通过上述对矩阵的广义求逆公式就可以避免对多导体传输线高维系数矩阵反复求逆, 并且状态方程矩阵  $\mathbf{H}$  的结构特征明显, 其主对角线上的分块矩阵均为低阶分块对角矩阵, 主对角线的左右副对角线上的分块矩阵是下三角块矩阵和上三角块矩阵, 因此状态方程  $\mathbf{H}$  的逆矩阵可以十分方便地求得. 下面将根据多导体传输线负载的不同分别对上述算法进行仿真验证.

### 4 算法验证

#### 4.1 两线串音问题

经典 FDTD 算法在求解多导体传输线的波过程计算中会受到稳定条件的约束, 导致时间步长不能取得太大, 计算效率比较低. 相比较于 FDTD 算法, 本文提出的空间半离散-高精度时域算法可以采用相对较大的时间步长, 且单步  $s$  级块方法具有 L-稳定性可以有效地抑制 FDTD 算法计算波过程出现的波形“毛刺”现象. 为验证本文所提单步多级算法的有效性, 分别采用本文算法和 FDTD 算法对如图 3 所示的(2+1)多导体无损传输线的串音问题进行仿真分析. 如图 3 所示,  $u_{s2}$  为单位阶跃电压源,  $R_{s1}$ 、 $R_{s2}$ 、 $R_{L1}$  和  $R_{L2}$  都等于  $50 \Omega$ , 传输线的长度为  $0.5 \text{ m}$ , 传输线系统的初始条件为零状态, 其单位长度的电感 ( $\mu\text{H}/\text{m}$ ) 和电容矩阵 ( $\text{pF}/\text{m}$ ) 如下:

$$\begin{aligned} L &= \begin{bmatrix} 1.10418 & 0.690094 \\ 0.690094 & 1.38019 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 40.628 & -20.314 \\ -20.314 & 29.7632 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

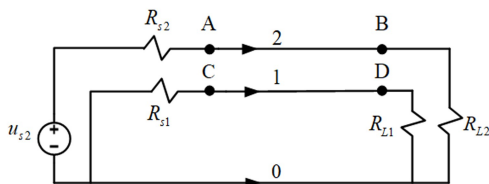


图 3 两线串音问题

Fig. 3 Crosstalk problem of two wires

空间半离散的区间数为  $M = 30$ , 考虑到 FDTD 稳定条件的限制, 其采用相对较小的步长,

而单步  $s$  级块方法具有  $s+1$  阶数值精度因而可以较大的时间步长.仿真结果见图 4 和图 5 所示.

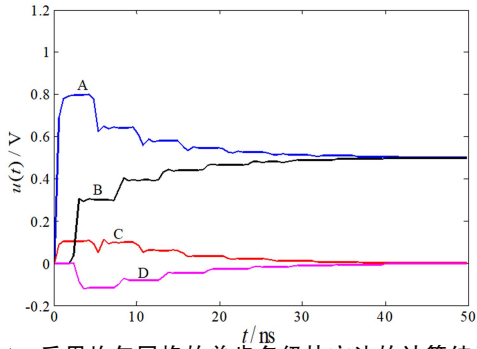


图 4 采用均匀网格的单步多级块方法的计算结果  
( $s=3, h=6.0 \times 10^{-10}$  s)

Fig. 4 Computational results of single-step multistage block method using uniform grid ( $s=3, h=6.0 \times 10^{-10}$  s)

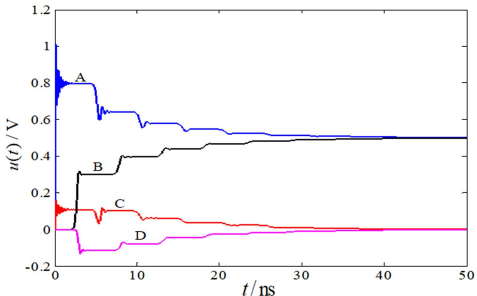


图 5 FDTD 的计算结果 ( $h=5.0 \times 10^{-12}$  s)

Fig. 5 Computational results of FDTD ( $h=5.0 \times 10^{-12}$  s)

从图 4 和图 5 可以看出,二者计算的结果基本吻合,但是 FDTD 算法计算的结果存在明显“毛刺”,本文计算的结果则比较光滑没有明显的数值振荡现象.

#### 4.2 非均匀多导体传输线端接线性负载

考虑如图 6 所示的 2 根非均匀有损传输线系统.传输线的分布参数如下:

$$\begin{aligned} L_{11}(x) &= L_{22}(x) = 387 / (1 + K(x)), \text{ nH/m;} \\ L_{12}(x) &= L_{21}(x) = K(x)L_{11}(x), \text{ nH/m;} \\ C_{11}(x) &= C_{22}(x) = \\ & 104.13 / (1 - K(x)), \text{ pF/m;} \\ C_{12}(x) &= C_{21}(x) = -K(x)C_{11}(x), \text{ pF/m;} \\ R_{11} &= R_{22} = 50 / (1 + K(x)), \text{ } \Omega/\text{m;} \\ g_{11} &= g_{22} = 0.001 / (1 - K(x)), \\ g_{12} &= g_{21} = 0, \text{ S/m;} \\ K(x) &= 0.25(1 + 0.6\sin(\pi x + \pi/4)). \end{aligned}$$

传输线的长度为 0.5 m,首端电阻  $R_{S1} = R_{S2} = 100 \Omega$ ,末端电阻  $R_{L1} = R_{L2} = 50 \Omega$ .导体 12(如图 6 所示)的输入电压波梯形脉冲,其上升和下降时间均为 1 ns、脉宽为 4 ns,起始时间为 0 s,幅度为 1 V;导体 34(如图 6 所示)为无源传输线.利用 Ansoft

软件中的 2D Extractor 场求解器模拟计算了该模型,得到了导体 12 和导体 34 中电磁波信号传播的速度为  $v_1 = 1.521 \times 10^8$  m/s 和  $v_2 = 1.482 \times 10^8$  m/s.因此,为了保证 FDTD 算法在时域数值积分的稳定性,根据式(20)来确定最优的时间积分步长.

$$h \leq \frac{\Delta x}{v_1} \quad (20)$$

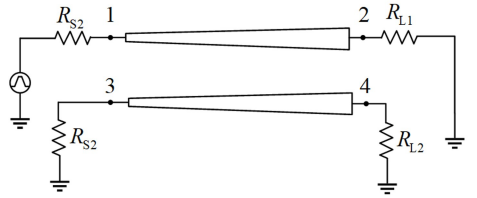
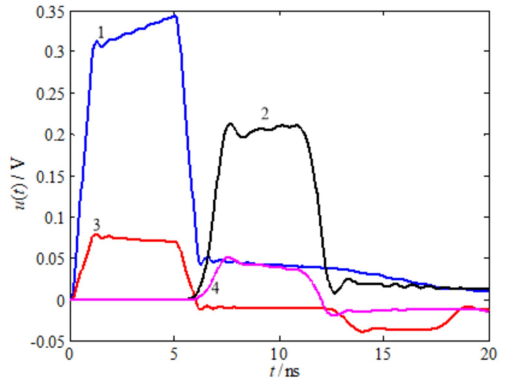


图 6 非均匀传输线系统

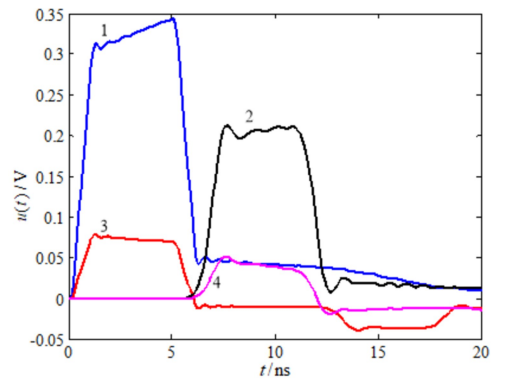
Fig. 6 Non-uniform transmission line system



注: $s=3, h=5.0 \times 10^{-11}$  s

图 7 采用均匀网格的单步多级块方法的计算结果

Fig. 7 Computational results of single-step multistage block method using uniform grid



注: $s=4, h=1.0 \times 10^{-10}$  s

图 8 采用均匀网格的单步多级块方法的计算结果

Fig. 8 Computational results of single-step multistage block method using uniform grid

如图 7 和图 8 所示,空间半离散的区间数为

$M=30$ ,从中可以看出本文算法基本不受时间步长的限制(不受式(20)的约束),可以实现大步长的高效仿真.对于多导体传输线的时域分析而言,与FDTD算法受到稳定性条件的限制以及其他空间半离散-时域数值积分算法相比,本文提出算法不受时间积分步长的限制,并可以有效地抑制数值振荡,采用大步长仿真效率高.

## 5 结论

相对于传统的FDTD算法,本文提出的多导体传输线时域分析的高阶算法可以采用大时间步长进行时域仿真,且可以抑制传输线在间断解处的非物理振荡;同时,采用扩展Sherman-Morrison公式求状态矩阵的逆矩阵适应于求解含集中参数元件的多导体传输线系统,因而该算法适用范围更加广泛.在文中算法的基础上,可采用矩阵分裂技巧进一步提高该算法的计算效率.

## 参考文献:

- [1] 张希. 传输线暂态响应的一种数值算法[J]. 西安邮电学院学报, 2006, 11(3): 139-141.  
ZHANG Xi. Transient response analysis of transmission line by a of numerical solutions[J]. Journal of Xi'an University of Post and Telecommunications, 2006, 11(3): 139-141.
- [2] 张玉廷, 蔡智, 张华. 多导体传输线瞬态响应研究[J]. 电波科学学报, 2014, 29(2): 377-384.  
ZHANG Yuting, CAI Zhi, ZHANG Hua. Transient analysis of multiconductor transmission lines[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2014, 29(2): 377-384.
- [3] 王艳, 王阳, 赵洪山, 等. 中压配电网电力线载波通信信道建模[J]. 电力系统保护与控制, 2021, 49(8): 50-57.  
WANG Yan, WANG Yang, ZHAO Hongshan, et al. Channel modeling of power line communication in a medium voltage distribution network[J]. Power System Protection and Control, 2021, 49(8): 50-57.
- [4] 王艳, 陈家玉, 赵洪山, 等. 中压配电网载波通信卡式电感耦合器耦合模型[J]. 电力系统保护与控制, 2019, 47(11): 87-94.  
WANG Yan, CHEN Jiayu, ZHAO Hongshan, et al. Clamp inductive coupler coupling model of medium voltage distribution network carrier communication[J]. Power System Protection and Control, 2019, 47(11): 87-94.
- [5] 高杰, 谷雨, 潘祎希, 等. 基于经验小波变换和高频分量的微电网保护方法[J]. 电力系统保护与控制, 2020, 48(19): 50-56.  
GAO Jie, GU Yu, PAN Yixi, et al. A microgrid protection method based on an empirical wavelet transform and a high frequency component[J]. Power System Protection and Control, 2020, 48(19): 50-56.
- [6] 余佩, 李晓春, 王宁, 等. 基于WLP-FDTD方法的传输线瞬态分析与计算[J]. 计算物理, 2016, 33(2): 197-204.  
YU Pei, LI Xiaochun, WANG Ning, et al. Transient analysis and computation of transmission line based on WLP-FDTD method[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2016, 33(2): 197-204.
- [7] OMIYA M, HIKAGE T, OHNO N, et al. Design of cavity-backed slot antennas using the finite-difference time-domain technique[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1998, 46(12): 1853-1858.
- [8] CABALLERO P T, MARQUES COSTA E C, KUROKAWA S. Frequency-dependent multiconductor line model based on the Bergeron method[J]. Electric Power Systems Research, 2015, 127: 314-322.
- [9] TANG M, MAO J. A precise time-step integration method for transient analysis of lossy nonuniform transmission lines[J]. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 2008, 50(1): 166-174.
- [10] 李鸿儒, 李征帆. 基于线性多步积分法建立高速互连系统的缩减模型[J]. 上海交通大学学报, 2002, 36(3): 311-314.  
LI Hongru, LI Zhengfan. Order reduction model of high-speed interconnect system on linear multi-step integral method[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2002, 36(3): 311-314.

## 附录:

单步 $s$ 级块方法采用均匀网格分布的系数矩阵 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{d}$ 的值:

$$(1) s=3 \text{ 时 } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{107}{120} & \frac{-37}{120} & \frac{3}{40} \\ \frac{17}{15} & \frac{8}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d} = \left[ \frac{41}{120} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{8} \right]^T.$$

$$(2) s=4 \text{ 时 } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{2153}{10080} & \frac{-127}{1680} & \frac{263}{10080} & \frac{-79}{20160} \\ \frac{193}{630} & \frac{13}{105} & \frac{-17}{630} & \frac{17}{2520} \\ \frac{11}{32} & \frac{3}{16} & \frac{5}{32} & \frac{-1}{64} \\ \frac{16}{45} & \frac{2}{15} & \frac{16}{45} & \frac{7}{90} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d} = \left[ \frac{1811}{20160} \quad \frac{227}{2520} \quad \frac{5}{64} \quad \frac{7}{90} \right]^T.$$

(下转第 697 页)

2008, 101(5): 057006.

- [24] HSU F C, LUO J Y, YE H K W, et al. Superconductivity in the PbO-type structure  $\alpha$ -FeSe[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2008, 105(38): 14262-14264.
- [25] WANG Q Y, LI Z, ZHANG W H, et al. Interface-induced high-temperature superconductivity in single unit-cell FeSe films on SrTiO<sub>3</sub>[J]. Chinese Physics Letters, 2012, 29(3): 037402.
- [26] 闻海虎. 铁基超导材料物理研究[J]. 中国材料进展, 2015(1): 73-78.  
WEN Haihu. Iron-based superconducting materials and pairing mechanism[J]. Materials China, 2015(1): 73-78.
- [27] IYO A, KAWASHIMA K, KINJO T, et al. New-structure-type Fe-based superconductors: CaAF<sub>4</sub>As<sub>4</sub> (A = K, Rb, Cs) and SrAF<sub>4</sub>As<sub>4</sub> (A = Rb, Cs)[J]. Journal of the American Chemical Society, 2016, 138(10): 3410-3415.
- [28] CHENG W, LIN H, SHEN B, et al. Comparative study of vortex dynamics in CaKFe<sub>4</sub>As<sub>4</sub> and Ba<sub>0.6</sub>K<sub>0.4</sub>Fe<sub>2</sub>As<sub>2</sub> single crystals[J]. Science Bulletin, 2019, 64(2): 81-90.
- [29] WANG C L, HE T, HAN Q Q, et al. Novel sample-thickness-dependent flux pinning behaviors of KFe<sub>2</sub>As<sub>2</sub> intercalations in CaKFe<sub>4</sub>As<sub>4</sub> single crystals[J]. Superconductor Science and Technology, 2021, 34(5): 055001.
- [30] LU X F, WANG N Z, WU H, et al. Coexistence of superconductivity and antiferromagnetism in (Li<sub>0.8</sub>Fe<sub>0.2</sub>)OHFeSe[J]. Nature Materials, 2015, 14(3): 325-329.
- [31] DONG X L, JIN K, YUAN D N, et al. (Li<sub>0.84</sub>Fe<sub>0.16</sub>)OHFe<sub>0.98</sub>Se superconductor: Ion-exchange synthesis of large single-crystal and highly two-dimensional electron properties[J]. Physical Review B, 2015, 92(6): 064515.
- [32] NAZIR M, XU Z T, PENG N H, et al. Enhancement of critical current density in Helium ion irradiated Ba(Fe,Co)<sub>2</sub>As<sub>2</sub> thin films [J]. Superconductor Science and Technology, 2020, 33(7): 075012.
- [33] YUAN P, HAN J, CHENG P Y, et al. Emergence of exchange bias field in FeS superconductor with cobalt-doping[J]. Journal of Physics: Condensed Matter, 2021, 33(33): 335601.

责任编辑:任长江

(上接第 644 页)

- [11] 刘磊,崔翔,齐磊. 时域有限元法求解传输线瞬态波过程[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(3): 112-118.  
LIU Lei, CUI Xiang, QI Lei. Transients analysis of transmission line by time domain finite element method[J]. Proceedings of the Chinese Society for Electrical Engineering, 2008, 28(3): 112-118.
- [12] 杜巍,李永刚,刘教民,等. 基于时域有限元的 VFTO 全过程仿真新方法[J]. 中国电机工程学报, 2014, 34(18): 3004-3012.  
DU Wei, LI Yonggang, LIU Jiaomin, et al. A new VFTO whole process simulation method based on time domain finite element[J]. Proceedings of the CSEE, 2014, 34(18): 3004-3012.
- [13] 贾磊,张亚婷,赵训君,等. 非均匀传输线中电磁暂态过程的新型时域算法[J]. 高电压技术, 2009, 35(2): 430-434.  
JIA Lei, ZHANG Yating, ZHAO Xunjun, et al. New time domain algorithm for computation of electromagnetic transients in nonuniform transmission line[J]. High Voltage Engineering, 2009, 35(2): 430-434.
- [14] 高印寒,王天皓,杨开宇,等. 基于通量分裂的一阶迎风差分格式在传输线分析中的应用[J]. 吉林大学学报(工学版), 2014, 44(4): 1031-1036.  
GAO Yinhan, WANG Tianhao, YANG Kaiyu, et al. Application of first-order upwind difference scheme based on flux splitting method in transmission line analysis[J]. Journal of Jilin University(Engineering and Technology Edition), 2014, 44(4): 1031-1036.
- [15] 李博文. 多体动力学微分-代数方程数值算法的稳定性研究[D]. 青岛: 青岛大学, 2020.  
LI Bowen. Study on stability of numerical algorithms for differential algebraic equations of multibody dynamics[D]. Qingdao: Qingdao University, 2020.
- [16] BRU R, CERDÁN J, MARÍN J, et al. Preconditioning sparse nonsymmetric linear systems with the Sherman-Morrison formula[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2003, 25(2): 701-715.

责任编辑:任长江