信阳师范学院学报(自然科学版)
JOURNAL OF XINYANG NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition)

一类具有标准发生率和总人口变化的SIRS模型的全局稳定性分析

周会娟, 兰曼

DOI:10.3969/j.issn.1003-0972.2020.03.002　　**文章编号**:1003-0972(2020)03-0351-03

一类具有标准发生率和总人口变化的 SIRS 模型的全局稳定性分析

周会娟*,兰　曼

(洛阳理工学院 数学与物理教学部,河南 洛阳 471000)

摘　要:考虑总人口变化且康复个体不具终身免疫的情况,建立了一类具有标准发生率的 SIRS 传染病模型.应用更新方程得到了模型的基本再生数 R_0.通过构造 Lyapunov 函数证明平了衡点的全局稳定性.结果显示:当 $R_0<1$ 时,无病平衡点是全局渐近稳定的;当 $R_0>1$ 且失去免疫的速率(δ)充分大时,地方病平衡点是全局渐近稳定的.

关键词:SIRS 模型;全局稳定性;基本再生数;标准发生率

中图分类号:O175.2　　**文献标志码**:A　　**开放科学(资源服务)标识码(OSID)**:

Global Stability of a Kind of SIRS Model with Standard Incidence Rate and Nonconstant Total Population

ZHOU Huijuan*,LAN Man

(Department of Mathematics and Physics,Luoyang Institute of Science and Technology,Luoyang 471000,China)

Abstract:Considering the case in which the total population is nonconstant and the lifelong immunity of population is absent, a kind of SIRS model with standard incidence is proposed. The basic reproduction number R_0 is obtained by a renewal equation. Moreover, the global stability of equilibria is proved by a suitable Lyapunov function. The results show that if $R_0<1$, then the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable; if $R_0>1$ and the loss rate of immunity is large enough, then the endemic equilibrium is globally stable.

Key words:SIRS model; global stability; basic reproduction number; standard incidence rate

0　引言

目前,数学模型已被广泛地应用于传染病动力学的研究[1,2],其中 SIS 模型和 SIR 模型是两种经典的传染病动力学模型.这两种模型的差别在于个体对疾病的免疫力不同,SIR 模型描述的是个体对疾病具有永久免疫力,而 SIS 模型描述的是暂时免疫.由于疾病传播发生率描述和体现了接触方式等可能的传染途径对传染病传播的影响,因此其对疾病的传播发展起到重要作用.经典的疾病发生率函数有:双线性发生率(βSI)和标准发生率($\beta SI/N$),其中 S 和 I 分别表示易感和被感染个体的数量,β 表示传播速率,N 为总人口数量.

近年来,很多学者对具有这两类发生率函数的常微分方程、偏微分方程、随机方程等的动力学模型进行了研究[3-8].对这些模型全局动力学性质的研究将有助于相关政府部门采取措施控制疾病传播.用于研究传染病模型的全局动力学性质的方法有:构造 Lyapunov 函数、单调系统以及构造单调序列等.后两种方法对系统结构要求较高,必须具有单调结构;构造 Lyapuonv 函数的方法普适性更高,但构造技巧要求较高.

在全局动力学的研究中,具有非永久性免疫的 SIRS 模型全局动力学性质具有挑战性,一直没有得到彻底的解决[5,9].虽然,文献[3-8]用各种方法解决 SIRS 模型的全局稳定性,但所得结论都含有

收稿日期:2019-08-15;**修订日期**:2019-10-16;*.**通信联系人**,E-mail:lyzhouhuijuan@163.com

基金项目:国家自然科学基金项目(61573016)

作者简介:周会娟(1981—),女,河南洛阳人,讲师,硕士,主要从事应用数学研究.

与时间有关的假设.这种假设会随时间的变化而改变,在实际疾病的控制中不够合理.本文将通过构造 Lyapunov 函数来研究具有标准发生率和总人口变化的 SIRS 模型平衡点的全局动力学性质,并得到较为合理的条件.

1 模型建立及局部性质

采用SIRS模型的建模思想[7,8],总种群数量被分为三类:易感染者、感染者和康复者,分别用 $S(t)$、$I(t)$、$R(t)$ 表示,假设康复者类的个体按速率 δ 失去免疫力,再次变成易感者类,则可用下面的系统来描述暂时性免疫机理:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\Lambda-\dfrac{\beta SI}{N}-\mu S+\delta R,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta SI}{N}-(\mu+\gamma+\alpha)I,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I-(\mu+\delta)R.\end{cases}\tag{1}$$

其中:$S=S(t)$, $I=I(t)$, $R=R(t)$ 表示 t 时刻各种群人口的数量;Λ 表示出生率;μ 表示自然死亡率;β 表示传播速率;α 表示由疾病引起的死亡率;γ 表示感染个体治愈率.$N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$ 表示总种群大小.考虑 $N=N(t)$ 是可变的且感染函数率取 $\beta SI/N$ 这种标准形式,则系统(1)可以改写为:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\Lambda-\mu N-\alpha I,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta(N-I-R)I}{N}-(\mu+\gamma+\alpha)I,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I-(\mu+\delta)R.\end{cases}\tag{2}$$

容易计算得到,系统(2)存在无病平衡点

$$E_0=(N^0,0,0)=(\frac{\Lambda}{\mu},0,0),$$

在无病平衡点 E_0 处线性化系统(2)可得:

$$I'=\beta I-(\mu+\gamma+\alpha)I,\tag{3}$$

求解式(3)可得

$$I(t)=I_0\mathrm{e}^{-(\mu+\gamma+\alpha)t}+\beta\int_0^t\mathrm{e}^{-(\mu+\gamma+\alpha)(s)}I(t-s)\mathrm{d}s.\tag{4}$$

式(4)为一个更新方程,因此通过文献[10]的方法得模型(1)的基本再生数为

$$R_0=\frac{\beta}{\mu+\gamma+\alpha}.\tag{5}$$

假设系统(2)有和时间无关的解 $E^*=(N^*,I^*,R^*)$,则其满足:

$$\begin{cases}0=\Lambda-\mu N^*-\alpha I^*,\\ 0=\dfrac{\beta(N^*-I^*-R^*)I^*}{N^*}-(\mu+\gamma+\alpha)I^*,\\ 0=\gamma I^*-(\mu+\delta)R^*.\end{cases}\tag{6}$$

求解方程组(6)可得地方病平衡点 E^*,并有下面的定理1:

定理1 如果 $R_0>1$,那么系统(2)存在唯一正的地方病平衡点 $E^*=(N^*,I^*,R^*)$,其中

$$N^*=\frac{\Lambda\beta\mu}{\beta\mu+\alpha(\mu+\delta)(R_0-1)},$$

$$I^*=\frac{\Lambda(\mu+\delta)(R_0-1)}{\beta\mu+\alpha(\mu+\delta)(R_0-1)},$$

$$R^*=\frac{\gamma}{(\mu+\delta)}I^*.$$

2 全局动态分析

下面讨论系统(2)的全局动力学性质,对于无病平衡点 E_0 有定理2:

定理2 如果 $R_0<1$,那么无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的.

证明 构造 Lyapunov 函数 $V(t)=I(t)$.并对其求全导数,可得

$$V'(t)=I'(t)=\frac{\beta(N-I-R)I}{N}-(\mu+\gamma+\alpha)I\leqslant[\beta-(\mu+\gamma+\alpha)]I=(\mu+\gamma+\alpha)(R_0-1)I.$$

显然,当且仅当 $I=0$ 时等号成立.把 $I=0$ 代入系统(2)第一个方程可知,当 $t\to\infty$ 时 $N\to N^0$.进而,无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的.证毕.

接下来,考虑地方病平衡点 E^* 的全局稳定性.系统(2)可以改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\mu(N-N^*)-\alpha(I-I^*),\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta I(\dfrac{N-I-R}{N}-\dfrac{N^*-I^*-R^*}{N^*}),\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma(I-I^*)-(\mu+\delta)(R-R^*).\end{cases}\tag{7}$$

并有定理3:

定理3 如果 $R_0>1$ 且 $\mu+2\delta>\alpha$,那么对于任何初值 $(N_0,I_0,R_0)\in\mathbf{R}_+^3$,地方病平衡点 E^* 是全局渐近稳定的.

证明　构造 Lyapunov 函数

$$V(t)=V_N(t)+V_I(t)+V_R(t),$$

其中

$$V_N(t)=N-N^*-N^*\ln\frac{N}{N^*},$$

$$V_I(t)=a_2\left(I-I^*-I^*\ln\frac{I}{I^*}\right),$$

$$V_R(t)=\frac{a_3}{2N}(R-R^*)^2,$$

这里 a_2 和 a_3 为待定系数．对系统(7) 中的 $V_N(t)$ 进行求导可得

$$\frac{\mathrm{d}V_N(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{N-N^*}{N}N'(t)=\frac{N-N^*}{N}(-\mu(N-N^*)-\alpha(I-I^*))=-\mu\frac{(N-N^*)^2}{N}-\alpha I^*\left(1-\frac{N^*}{N}\right)\left(1-\frac{I}{I^*}\right).\tag{8}$$

计算 $V_I(t)$ 的全导数可得

$$\frac{\mathrm{d}V_I(t)}{\mathrm{d}t}=a_2\frac{(I-I^*)}{I}I'(t)=a_2\beta(I-I^*)\left(\frac{I^*+R^*}{N^*}-\frac{I+R}{N}\right)=\frac{a_2\beta I^*}{N^*}(I^*+R^*)\left(1-\frac{N^*}{N}\right)\left(\frac{I}{I^*}-1\right)-\frac{a_2\beta I^*}{N}\left(\frac{I}{I^*}-1\right)^2+\frac{a_2\beta I^*R^*}{N}\left(\frac{I}{I^*}-1\right)\left(1-\frac{R}{R^*}\right).\tag{9}$$

类似地，对 $V_R(t)$ 求全导数可得

$$\frac{\mathrm{d}V_R(t)}{\mathrm{d}t}=a_3\frac{R-R^*}{N}R'(t)-\left(\frac{a_3}{2}\frac{(R-R^*)}{N}\right)^2N'(t)=\frac{a_3\gamma R^*I^*}{N}\left(\frac{I}{I^*}-1\right)\left(\frac{R}{R^*}-1\right)-a_3(\mu+\delta)(R-R^*)^2-\frac{a_3}{2}\left(\frac{(R-R^*)}{N}\right)^2N'(t).\tag{10}$$

对式(8)、式(9) 和式(10) 求和可得

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=-\mu\frac{(N-N^*)^2}{N}+\left(\frac{a_2\beta}{N^*}(I^*+R^*)-\alpha\right)I^*\left(1-\frac{N^*}{N}\right)\left(1-\frac{I}{I^*}\right)-\frac{a_2\beta I^*}{N}\left(\frac{I}{I^*}-1\right)^2+(a_2\beta-a_3\gamma)\frac{I^*R^*}{N}\left(\frac{I}{I^*}-1\right)\left(1-\frac{R}{R^*}\right)-a_3\frac{(R-R^*)^2}{2N}(N'(t)+2(\mu+\delta)N)=-\mu\frac{(N-N^*)^2}{N}+\left(\frac{a_2\beta}{N^*}(I^*+R^*)-\alpha\right)I^*\left(1-\frac{N^*}{N}\right)\left(1-\frac{I}{I^*}\right)-\frac{a_2\beta I^*}{N}\left(\frac{I}{I^*}-1\right)^2+(a_2\beta-a_3\gamma)\frac{I^*R^*}{N}\left(\frac{I}{I^*}-1\right)\left(1-\frac{R}{R^*}\right)-a_3\frac{(R-R^*)^2}{2N}(\Lambda+(\mu+2\delta)(S+R)+(\mu+2\delta-\alpha)I).\tag{11}$$

因此，取

$$a_2=\frac{\alpha N^*}{\beta(I^*+R^*)},\quad a_3=\frac{\alpha N^*}{\gamma(I^*+R^*)},$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant-\frac{\alpha N^*(R-R^*)^2}{2N\gamma(I^*+R^*)}(\Lambda+(\mu+2\delta)(S+R)+(\mu+2\delta-\alpha)I).\tag{12}$$

因此，若 $\mu+2\delta>\alpha$，则 $V'(t)\leqslant 0$．其最大不变集 $\{(N,I,R)\in\mathbf{R}_+^3\mid V(t)=0\}$ 为平衡点 E^*．由 LaSalle 不变集原理可知，当 $R_0>1$ 且 $\mu+2\delta>\alpha$ 时，地方病平衡点 E^* 是全局渐近稳定的．证毕．

3　结论

本文通过构造恰当的 Lyapunov 函数的方法得出 SIRS 模型的全局渐近稳定性．从证明过程可以看出该方法有很大的技巧性，特别依赖于模型的结构和所构造的 Lyapunov 函数．但本文仅当免疫丧失率比较大(即 $\mu+2\delta>\alpha$)时，证明了地方病平衡点的全局稳定性．当这一条件不满足时，地方病平衡点是否仍稳定仍然是一个公开问题．

参考文献：

［1］ DIEKMANN O，HEESTERBEEK J A P. Mathematical epidemiology of infectious diseases：Model building，analysis and interpretation[M]. Chichester：John Wiley Sons，2000.

［2］ ENATSU Y，NAKATA Y，MUROYA Y. Lyapunov functional techniques for the global stability analysis of a delayed SIRS epidemic model[J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2012，13(5)：2120-2133. （下转第 364 页）

由定理 1 知该推论成立.证毕.

3 结语

在 Cauchy-Davenport 定理、Vosper 定理等基本定理的基础上,运用组合分析技巧研究有限交换群的堆垒问题是最基本的方法,也是最有效的方法之一.本文正是在此指导思想下研究得到了有限交换群 C_p^2 的势为 $2p-3$ 的子集 S 能张成 G 的一个充分条件,我们将深入研究 S 张成 G 的充要条件.

参考文献:

[1] ERDÖS P, HEILBRONN H. On the addition of residue classes mod p [J]. Acta Arithmetica, 1964, 9(2): 149-159.

[2] PENG C. Addition theorems in elementary Abelian groups, I[J]. Journal of Number Theory, 1987, 27(1): 46-57.

[3] FREEZE M, GAO W D, GEROLDINGER A. The critical number of finite abelian groups[J]. Journal of Number Theory, 2009, 129(11): 2766-2777.

[4] GAO Weidong, HAN Dongchun, QIAN Guoyou, et al. On additive bases II[J]. Acta Arithmetica, 2015, 168(3): 247-267.

[5] QU Yongke, HAN Dongchun. Additive bases of $C_p \oplus C_{p^n}$ [J]. International Journal of Number Theory, 2017, 13 (9): 2453-2459.

[6] GRYNKIEWICZ D J. Structural additive theory[M]. New York: Springer, 2013.

[7] GAO W, HAMIDOUNE Y O, LLADÓ A, et al. Covering a finite abelian group by subset sums[J]. Combinatorica, 2003, 23(4): 599-611.

[8] QU Yongke, WANG Guoqing, WANG Qinghong, et al. Extremal incomplete sets in finite abelian groups[J]. Ars Combinatoria, 2014, 116: 457-475.

[9] MANN H B, WOU Y F. An addition theorem for the elementary Abelian group of type (p, p) [J]. Monatshefte Für Mathematik, 1986, 102(4): 273-308.

[10] NATHANSON M B. Additive number theory: inverse problems and the geometry of sumsets[M]. New York: Springer, 1996.

[11] DIDERRICH G T. An addition theorem for Abelian groups of order pq [J]. Journal of Number Theory, 1975, 7 (1): 33-48.

[12] DIAS DA SILVA J A, HAMIDOUNE Y O. Cyclic spaces for grassmann derivatives and additive theory[J]. The Bulletin of the London Mathematical Society, 1994, 26(2): 140-146.

责任编辑:郭红建

(上接第 353 页)

[3] CHEN J. An SIRS epidemic model[J]. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 2004, 19: 101-108.

[4] XU R, MA Z. Stability of a delayed SIRS epidemic model with a nonlinear incidence rate[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 41(5): 2319-2325.

[5] XIANG L, ZHANG Y X, HUANG J C. Stability analysis of a discrete SIRS epidemic model with vaccination[J]. J Differ Equat Appl, 2020, 26(3): 309-327.

[6] ZHANG Z H, PENG J G. A SIRS epidemic model with infection-age dependence [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 331: 1396-1414.

[7] RIFHAT R, MUHAMMADHAJI A, TENG Z D. A symptotic properties of a stochastic SIRS epidemic model with nonlinear incidence and varying population sizes[J]. Dynamical Systems, 2019, 35(1): 56-80.

[8] VARGAS-DE-LEON C. On the global stability of SIS, SIR and SIRS epidemic models with standard incidence[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2011, 44(12): 1106-1110.

[9] TUONG T D, NGUYEN D H, DIEU N T, et al. Extinction and permanence in a stochastic SIRS model in regime-switching with general incidence rate[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2019, 34: 121-130.

[10] YANG J, XU F. The computational approach for the basic reproduction number of epidemic models on complex networks[J]. IEEE Access, 2019, 7: 26474-26479.

责任编辑:郭红建