测量、维数、几何测度关系和地理空间分析

陈彦光

DOI:10.3969/j.issn.1003-0972.2020.01.015
文章编号:1003-0972(2020)01-0089-08

测量、维数、几何测度关系和地理空间分析

陈彦光*

(北京大学 城市与环境学院 城市与经济地理学系,北京 100871)

摘　要:分形维数概念是欧氏几何中的维数概念的一种发展或者推广,而维数概念本身则来自生活和生产中的测量. 当人们想要量算一个事物的长度、面积或者体积等测度的时候,就不可避免地涉及维数. 然而,经过数学家的抽象之后,维数似乎变得有些高深莫测. 这篇文章力图从日常生活中的测度出发,逐步揭开维数表面的抽象面纱,将其还原为一个通俗的概念. 维数可以由特征尺度与测度的幂律关系定义,此时测度确定,幂指数为欧氏维数;如果一个现象的特征长度不存在,则测度依赖于尺度,幂律关系不变,但幂指数给出分形维数. 分形几何与欧氏几何在测量方面具有"对偶"关系. 其一,测量目标不同. 欧氏几何体的维数不测可知,需要的是相应的测度;分形几何体的测度在理论上不测可知,需要的是相应的维数. 其二,表达形式不同. 欧氏几何体应该采用正幂律描述,建立尺度与测度关系;而分形几何体最好采用负幂律描述,建立尺度与测量次数的关系. 其三,测量重点不同. 欧氏几何重在测量结果,其基础是尺度;分形几何重在测量过程,其基础是标度.

关键词:测度;维数;特征长度;尺度;标度;分形;分维;地理分形

中图分类号:K90-06　　**文献标志码**:A　　**开放科学(资源服务)标识码(OSID)**:

Measurements, Dimension, Geometric Measure Relations and Geospatial Analysis

CHEN Yanguang*

(Department of Geography, College of Urban and Environmental Sciences, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: The concept of fractal dimension is a development or extension of the concept of dimension in Euclidean geometry, while the concept of dimension itself comes from measurement in life and production. Dimension is a very common concept. When people want to measure the length, area or volume of a thing, it inevitably involves dimension. However, after the abstraction of mathematicians, dimensionality seems to have become somewhat unpredictable. Taking daily life, history, legend and other issues as examples, this article gradually uncovers the abstract veil on the surface of dimensionality and reduces it to a popular concept. The idea of fractal dimension can be understood by Euclidean geometry contrast. Either fractal geometry or Euclidean geometry, a power exponential relationship can be established by measuring scale (such as length), measure (length, area, volume, etc.). Its power reflects the dimension of the measured object. However, fractal geometry and Euclidean geometry have a dual relationship in measurement. Firstly, the measurement targets are different. The dimension of Euclidean geometry is uncertain, and the corresponding measure is needed; the measure of fractal geometry is uncertain in theory, and the corresponding dimension is needed. Secondly, the forms of expression are different. Euclidean geometry should be described by a positive power law, which gives the relationship between scale and measurement, while fractal geometry should be described by a negative power law, which gives the relationship between scale and measurement times. Thirdly, the emphasis of measurement is different. Euclidean geometry is based on measurement results and fractal geometry is based on scaling and measurement process.

Key words: measure; dimension; characteristic length; scale; scaling; fractals; fractal dimension; geographical fractals

收稿日期:2019-07-26;**修订日期**:2019-10-06;*.**通信联系人**,E-mail:chenyg@pku.edu.cn
基金项目:国家自然科学基金项目(41671167)
作者简介:陈彦光(1965—),男,河南罗山人,教授,博士,博士生导师,从事城市和理论地理学研究.

0　引言

科学研究始于描述,成于理解:首先要描述一个系统如何运转,然后再解释它为什么这样运转[1,2]. 为了有效地描述一个系统,需要进行适当的测量,这就涉及测度概念. 著名科学家开尔文(Kelvin)勋爵即汤姆森(William Thomson,1824—1907)曾经指出:“当你对你所讨论的事物进行测量并且用数字表示它的时候,你对它有所认识;但是,如果你不能测量,不能采用数字表示,则你的知识存在缺陷,属于不能令人满意的那种(知识). ”[3]测量就会用到尺度. 在测量过程中,人们总是有意无意通过种种途径建立一种尺度与相应数量的关系. 如果尺度与相应测度或者量值之间构成幂指数关系,又会用到维数概念. 维数与量纲是一个问题的两个方面. 尺度与测度的幂指数关系本质上是一种比例关系,这种比例关系暗示几何学中的维数一致性公理:只有相同维数的测度之间才能构成比例关系,否则不能[4]. 维数一致性也就是量纲一致性. 量纲问题曾经导致理论地理学的很多困惑,包括人口规模的引力模型[5-7]、城市人口—城区面积的异速生长定律等[4,8,9].

传统的定量分析和数学建模依赖于特征尺度. 只有找到特征尺度,才能进行有效的数量描述,进而获得令人信服的理解结果. 然而,复杂系统如城市通常没有特征尺度,从而传统数学描述方法效果不佳,需要代之以标度分析,而标度分析倚重于标度指数如分形维数. 另一方面,地理学是一门空间信息科学[10,11],维数概念对地理学而言基本而又非常重要. 一方面,维数是一种空间测度,这与地理学的性质一致;另一方面,维数是一种信息测度[12,13],这也与地理学的性质一致. 传统的欧氏维数是确定的量,在科学描述没有太多的信息. 然而,分形维数就不同了. 分维蕴含很多重要的空间信息,它是采用欧氏几何学无法描述的一类现象的基本参数. 分形几何学发展以后,维数概念从先验领域走进经验领域,成为地理空间分析的特征参量之一. 维数概念原本非常简单,但经过数学家的抽象表述之后,维数又令人感到有些琢磨不定. 这篇文章是为人们理解分形城市做预备的,目的是揭开维数表面的抽象面纱,将其还原为容易理解的几何概念. 因此,作者将采用通俗的语言,从日常生活中的测量开始,逐步说明维数概念的内涵. 然后,比较欧氏几何学的测度关系与分形几何学的测度关系,通过对比分析帮助读者理解分维概念.

1　测量中的维数概念

1.1　生活、生产与测量

要理解分形,首先得理解分维;要理解分维,首先得理解测量. 数学上有所谓测度,长度、宽度、高度、面积、体积、质量等等都是基本测度,密度是基于基本测度的衍生测度(两个测度的比值). 更广义地,城市的规模、面积、产值为描述城市特征的测度,交通里程、节点密度为描述交通网络的测度. 河流长度、湖泊面积、海拔高度,如此等等,都是测度. 为了确定测度的量值,需要尺度. 尺度和测度的关系,可以反映被测量体的维数.

在生命演化的过程中,测量是一种非常重要的活动. 人类最频繁的测量就是度量时间,故在手机出现之前,人们都希望自己拥有一块手表. 中国古人在没有钟表的时代,采用沙漏、水漏乃至燃香测量时间. 当然,最广泛的测量还是空间测量. 在没有测量工具的情况下,人类采用自身器官作为测量工具:拇指和中指伸开作为一拃,两臂伸开作为一庹(约和五尺,或者八拃),左右脚各迈一步作为一步的长度(周步八尺,秦步六尺). 中国历史早期(夏商周)非常广泛地采用了人体度量.《史记 · 夏本纪》中记载禹“身为度,称以出”. 不仅度量长度,也度量容积:“布手知尺,布指知寸”、“一手之盛谓之掬,两手谓之溢”. 中国传说中的人类始祖——伏羲和女娲图像,就是两人分别持规和持矩. 无规矩不成方圆,手持规矩,随时准备测量. 孙悟空的金箍棒原是大禹治水所用的定海神珍铁,它可以根据江河形势伸缩变化. 这就涉及后面讨论的标度概念了. 孙悟空的变化本身暗含分形概念. 中国神话传说中有很多科学思想,此不赘述. 制造工具、建筑房屋、划分田亩,如此等等,都要测量. 没有测量,就没有人类文明的发展. 西方几何学就创生于古埃及人的土地测量——尼罗河每次涨水,都会洗刷掉田亩的界限,于是新一轮的测量开始了. 久而久之,测量知识积累了,几何学也就产生了. 测量不限于人类活动,很多生物都需要某种方式的测量. 生物学家研究发现,澳大利亚的狼都有自己的领地,领地近似为圆形,以狼的守望半径为尺度确定领地的大小,以体液划分疆界. 于是不同狼群的领地形成类似中心地的六边形网络. 还有地理学家发现,其他动物如非洲大象的领地也与中心地格局相似.

在测量过程中，就会出现测量体和被测量体.如今建立分形模型，首先就是确立测量体和被测量体的某种测度关系.就个人活动而言，怎么测量都可以.但是，在社会活动中，测量体需要具备如下特征：其一，简单性.测量体要简明、容易理解.其二，预知性.测量体的尺度事先知道，否则测量就没有意义.其三，统一性.测量体的尺寸经过权威定义，或者民间约定俗成，总之得到大众的认可.前面提到人体测量，基本原理在于，人体各个部分之间则具有比例关系，实则异速标度关系.一庹大约等于八拃，而一庹长也大体就是人体的高度.不同人身高不一样，但就某个种族而言，却有一个平均的身高作为标准.因为人类身高具有特征长度：特别高的人和特别矮的人极少，绝大多数人的身高围绕种族平均高度变化，大约呈现正态分布.正因为如此，才有人体测量出现.多个成人测量一个物体，其平均结果大体符合实际.在农家，几乎家家户户都有尺子(度)、斗(量)和秤(衡)，这些都是基本的、用作测量体的工具.中国历史提到秦始皇的功绩之一，常说他统一中国的度(长度测量)、量(容积测量)、衡(质量测量)，当然这不仅仅是秦始皇个人的功劳.不同的国家有不同的法定度量单位，这不利于国际交流.因此，今天撰写论文，都要求采用国际计量单位，基本的单位就是：度—m、量—L、衡—kg.

1.2 测量与维数

那么，上述这些与维数有什么关系呢？只要有测量，就会涉及维数，只是一般情况下人们不考虑有关理论问题.改革开放之前，很多农村地区村民饮水，要到较远的野外水井去挑水.人们常问的一个问题就是：你家的水缸可以装多少桶水？这就意味着人们用桶的容积来度量缸的容积.假定一个缸可以装下十桶半水，则桶的容积和缸的容积形成如下比例关系：缸的容量＝10.5×桶的容量.更一般地，被测量体(缸)的容积＝系数×测量体(桶)的容积.也就是说，测量体与被测量体的数值之间形成一种比例关系.形成这种关系的前提是，测量体和被测量体的量纲是一样的，或者它们有着相同的维数.如果采用一个平面，比方说一面镜子，来测量一缸水，是无法进行有效操作的.如果没有黏附力的作用，一面镜子根本不能装水，一次顶多盛出几个水分子，这样要测量无数次才可以完成容积的测量，理论上测量的结果为无穷大，这种结果没有任何实际意义.这就是说，立体(3 维)缸的容积与平面(2 维)的镜子的面积之间不能形成比例关系，因为它们的量纲不一样，或者说，维数不一致.不难想见，如果采用一条丝线直接测量一桶水的容积，更是不可操作.

如果有一个正方形的平面，希望知道它的面积，怎么测量呢？首先得制造一个更小的正方形，这个正方形的面积事先知道.比方说，采用边长为 0.1 m 的方块作为度量工具.采用这个方块来覆盖需要测量的正方形，假定最少移动 81 次刚好覆盖全部正方形面上的每一个部位.那么被测量体的面积大约就是 $81\times0.01=0.81\ \mathrm{m}^2$.于是得到如下公式：被测量体的面积＝系数×测量体的面积.综上所述，可以概括出如下比例关系：被测量体的测度＝系数×测量体的测度.

能否采用一个直线段以覆盖的方式来测量上述正方形的面积呢？不可以，因为需要采用无穷多个线段才能将一个正方形的表面覆盖，亦即测量结果为无穷大.能不能用一个杯子来测量正方形的面积呢？也不可以.因为正方形的平面没有容积，用体积来度量面积结果为零.当且仅当测量体和被测量体的维数相同的时候，才会得到有限的、并且数值不为零的测量结果，这个结果才具有实际意义.这就是测量体与被测量体的量纲一致性，或者维数一致性.在维数一致的情况下，被测量体的测度总是等于测量体的测度乘以某个常系数，或者说测量体与被测量体之间构成比例关系.反过来，形成比例关系的前提就是量纲一致，或者维数一致.在分形研究中，特别是揭示异速生长背后的分维关系的时候，人们常常采用几何测度关系的推广结果[9]：长度正比于面积的平方根、正比于体积的立方根、正比于 d 维广义体积的 d 次方根.这个关系的基本原理就在于上述测量.

2 几何测度关系

2.1 几何测度关系的归纳

根据量纲一致性原理，人们只能采用长度测量长度、面积测量面积、体积测量体积.当然，还可以用质量测量质量.之所以可以用秤衡量一个物体的质量，是因为秤砣本身也有质量.人们是利用杠杆原理和比例关系，采用秤砣来度量一个物体的质量的.不过，如果完全按照上述的规则测量，在现实活动中将会非常麻烦.人们不仅需要度量长度的尺子，还需要度量面积的方块，当然更需要度量体积的容器.这样，不仅不方便，而且很多情况下

不可行.比方说,要想知道一个很大的长方形的水池的容积,总不可能一桶一桶或者一瓢一瓢地度量!为此,人们需要更为简明、方便的度量方式.于是,有人发现,采用度量长度的尺子,不仅可以度量长度,同时可以度量面积和体积,进而度量质量乃至密度.于是,维数概念应运而生.

当人们采用一个 10 cm 长的尺子度量一个正方形的时候,需要开展如下工作:首先,实施纵向测量,假定测量 9 次刚好测出一个边长;然后,进行横向测量,假定也是 9 次测出一个边长.这样,正方形的面积就是 9×10×9×10=81×尺子长度的平方.在这里,纵向代表一个维度的方向,横向代表另一个维度的方向.由于需要两个维度,测量的结果就正比于尺子长度的 2 次方.这个以幂的形式出现的 2,就是被测量体的维度.这就自然而然涉及一个物体的维数了.对于一个二维的平面,需要沿着两个正交(垂直)的方向测量;采用一维的尺度测量三维的体积,需要沿着三个正交的方向测量.不妨举一个简单的例子.假定考虑一个三角形的面积,需要采用一维的尺度测量哪些数值呢?根据中学的平面几何知识可知,需要测量三角形的底边长度和高度.于是,三角形的面积等于 0.5×底边长度×高度.由于底边长度和高度都是一维测度,它们可以互相测量.假定用高度测量两次可以量出底边长度,那么底边长度就是 2×高度.也就是说,底边长度=系数×高度.于是,三角形的面积=0.5×2×高度的平方=系数×高度的二次方.这个二次方就反映的三角形的维数.采用类似的方法可以分析矩形、梯形、平行四边形等的维数.

对于一个圆形怎么办呢?古人实际上是将圆形分割成一个个非常狭窄的长方形或者梯形,理论上则是分解为底边非常短的三角形,分别计算面积,然后累加起来.当长方形的宽度接近于 0 的时候,累加的结果就非常逼近圆的面积了.这就不仅涉及维数,同时涉及微分和积分的思想了.对于一个变量,微分一次降低一个维度,积分一次增加一个维度.根本的原因,也在这里.实际上,曹冲称象就包含有数学变换、微分和积分的思想:将大象变换为石头,然后将石头分成一份一份的,最后再累加.石头分得越小,称出的大象的质量越是准确.复杂事物的测量不仅需要技巧,有时需要变换.古希腊数学家阿基米德(Archimedes,约 287-212 B.C.)为了测量国王皇冠的体积,将它变换为水的体积;借助水的体积和黄金的质量测量王冠的比重,就知道该王冠是否纯金构造.

可以看到,要想测量一个 d 维物体的某个测度(长度、面积、体积),只需要采用某个系数乘以特征长度的 d 次方,即有:物体的测度=系数×特征长度^d.对于正方形的面积,特征长度可以采用边长,维数为 2,系数为 1.对于矩形,特征长度可以是长边或宽边.长边和宽边可以互相测量,最方便的是用宽边测量长边.这样,取宽边为特征长度,维数为 2,系数为长边与宽边的比率.对于三角形,特征长度为一个边长以及与此边长正交的高度,当然可以将高度转换为边长或者将边长转换为高度,若取特征长度为高度,则维数为 2,比例系数为底边与高度比率的二分之一.对于矩形、梯形、三角形、平行四边形之类,特征长度和比例系数都容易确定,维数当然也很清楚.对于圆形,就不那么容易了.圆的特征长度可以取半径(当然也可以取直径),问题是比例系数如何确定.正因为如此,南北朝时期的祖冲之计算出圆周率——圆的周长与圆直径的比率——就是一个重要的数学成就.圆周长公式为:圆周=系数×半径=2×圆周率×半径.于是,系数就是圆周率的二倍,即 2π.

那么,如何计算圆的面积呢?前面提到将圆分割为细长条的方法.实际上,开普勒(Johanns Kepler,1571-1630)曾经提出一个简明的圆的面积估计方法,虽然是一个近似方法,但却可以导出精确的数学公式.将一个圆均分为 $2n$ 个扇形,将这些扇形拼接为一个近似平行四边形的图形,图形的高近似为半径,边长近似为圆周的一半.根据平行四边形的面积公式,可得:圆的面积=长×高=周长的一半×半径=圆周率×半径×半径=系数×半径的平方.这里,半径为特征长度,维数是 2,系数就是圆周率.更早地,阿基米德将圆分解为一个个非常细小扇形,每一个扇形近似地视为一个底边很小的三角形.由于三角形非常之窄,底边近似为弧长,高近似为半径,于是面积为"弧长×半径/2".所有三角形面积之和就是圆的面积,由此导出如下结论:一个圆的面积等价于一个大三角形的面积,这个三角形的高度等于圆的半径,底边等于圆的周长.因此可得:圆的面积=0.5×半径×圆周=0.5×半径×2×圆周率×半径=系数×半径的平方.这里系数等于圆周率,半径的平方指示的就是几何图形的维数.阿基米德的思想影响了开普勒,他们又共同影响了牛顿和莱布尼兹,导致微积分理论的创生.这种思想今天依然要用到.在现代人体电子

测量技术产生之前,医学上为了建立人体表面积与身高、体重的关系,采用人体贴膜的方式度量人体表面积:在人体上覆盖相同大小的小纸膜,如果贴了 N 块,则一个人的表面积就近似等于 N 乘以纸膜面积了.

总之,不论对于什么图形,只要确定了特征长度、系数和维数,就可以确定其长度、面积和体积了.于是得到如下公式:

长度=系数×特征长度

(如:圆周=2×π×半径)

面积=系数×特征长度的平方

(如:圆的面积=π×半径的平方)

体积=系数×特征长度的立方

(如:圆球的体积=(4π/3)×半径的立方)

由此可得如下几何测度关系:

长度=系数1×面积的平方根=系数2×体积的立方根

这就是在分维测量中常用的几何测度关系式.

2.2 一般原理的总结

总之,如果需要了解一个一维的线的测度(长度),只需要沿着一个方向测量出一个特征长度,最后的测度等于某个系数乘以特征长度.如果是曲线,就要将其分解为很小的直线段,极限的情况下就用到微分和积分,最终的结果依然是特征长度乘以某个系数.例如,圆周的长度就是圆周率的2倍乘以半径.如果需要了解一个二维物体的测度(面积),我们在两个彼此正交(垂直)的方向测量两个特征长度,最后的测度等于系数乘以特征长度1再乘以特征长度2.矩形的面积等于长边长乘以短边长(系数为1),三角形面积等于0.5乘以底边长再乘以高度(系数为1/2),平行四边形的面积等于底边乘以高度(系数为1),椭圆的面积等于圆周率乘以半长轴长度乘以半短轴长度(系数约为3.14),如此等等.所有上述几何体,两个特征长度之间都具有固定的比例关系,或者说可以采用一个特征长度度量另外一个特征长度.由于特征长度1(如三角形的底边)=系数×特征长度2(如三角形的高),最后的二维测度总是可以表成系数乘以某个特征长度的二次方.对于三维的测度(体积),需要沿着三个正交的方向测量三个特征长度,最后的测度等于系数乘以三个特征长度之积.例如,长方形的体积等于底边长1乘以底边长2乘以高,圆柱体的体积等于圆周率乘以半径平方再乘以高.由于三个特征长度之间维数相同,可以互为比例关系,最后三个特征长度之积可以转换其中一个特征长度的三次方.无论怎样,只要是欧氏几何体,一定可以由某个特征长度的 d 次方确定其 d 维测度,关键在于找出正确的比例系数.换言之,d 维的测度与其一维的特征长度的 d 次方成正比关系,公式为

测度=系数×特征长度^d

这里 d 为相应于测度的维数.如果测度确定,则维数为已知整数,如1、2、3.如果测度不确定,即依赖于尺度,则特征长度不存在,从而维数为未知数,经验上其计算结果表现为分数.

3 幂律与分形

3.1 两种幂律与分维概念

前面讲到,对于一个欧氏几何体,只要采用量纲一致的测量体进行度量,得到的结果是有限数值.对于一个矩形的面积,如果采用1维的线段覆盖,结果为无穷大;如果采用立方体覆盖,结果为0——一个平面在立体中占据的容积为0.恰当的方法是:采用小方块进行最小次数覆盖——最小次数覆盖意味着在不露缝隙的情况下尽可能不出现重叠现象,结果为方块的面积乘以测量次数.方块的面积等于边长的平方,于是矩形的面积等于测量次数乘以小方块的边长的平方,即有幂律形式:测度(面积)=测量次数×尺度(边长)^{维数}.这里,测量次数为系数,方块的边长为特征长度,面积为2维.对偶地,上式可以表示为负幂律形式:测量次数=测度(面积)×尺度(边长)$^{-维数}$.这里,测量次数成为测度,而面积变成了系数.可见,幂律可以等价地表示为负幂律形式.后面将会说明,对于欧氏几何体,幂律形式更为规范;而对于分形几何体,负幂律形式更为常见.

但是,有一类的几何体,如海岸线的模型——Koch曲线,它的维数很难基于欧氏几何学思想得到理解.如果说Koch曲线是一维物体,则它应该有一个确定的长度,因为它的两个端点的距离是有限的.但是,理论上,Koch曲线有无穷层次,当我们用一维的尺度进行测量的时候,随着测量尺度的缩小,测得的结果将是无穷大.如前所述,在欧氏几何中,只有采用线段测量面积或者体积的时候才会得到无穷大的结果.可见,Koch曲线不是一维现象.另一方面,Koch曲线也不是二维现象,否则,它会有一个不为0的确定的面积,但是,它的面积显然为0.从逻辑上判断,Koch曲线的维数应该介于1维到2维之间.实际上,它的维数约为1.262.相对于欧氏曲线,Koch曲线还有一个特点.

对于欧氏曲线，例如抛物线，要度量它的长度，可以将其微分为无数个直线段，然后积分即可. 可是，Koch 曲线不同，可以将其划分为无数个直线段，但它处处连续，却处处不光滑，无法积分. 简而言之，Koch 曲线不具有常规意义的可积性.

不过，人们更关心的还是如下问题. 海岸线这类分形体与欧氏几何体的一个重要区别在于，欧氏几何体的测量结果不依赖于尺度的大小，而分形体的测量结果依赖于尺度的大小. 分形的一个基本特征就是测度的尺度依赖性. 对于分形而言，其测量公式也可以表示为如下幂律形式：

被测量的测度(不确定)＝系数×可变的尺度^{维数}

或者负幂律形式：

测量的数目(不确定)＝系数×可变的尺度$^{-维数}$

注意，这里关系式的结构没有变化，但可变尺度代替了特征长度. 也可以这样理解，在欧氏几何体的测量中，特征长度是一定的；在分形几何的测量中，没有确定的特征长度，采用无数个可能的长度进行度量.

3.2　欧氏几何与分形几何的对偶关系

对于欧氏几何体，最后测量的结果是确定的，维数是预知的，维数没有有用的信息，但测度对人们有用. 对于一个圆面而言，它的系数(圆周率)、维数($d=2$)都是确定的，人们关心的是它的半径(特征长度)，据此判断它的面积和周长. 半径不一样，面积和周长也就不一样. 其有效信息包含在特征长度里面，或者说包含在所需要的测度之内. 有了特征长度，总可以唯一地确定一个测度. 特征长度的信息和最后测度的信息具有一致性. 因此，对于欧氏几何体，幂律公式反映的是长度、面积、体积等测度与线性尺度的关系，测量次数等信息则隐含在比例系数等常数里面. 给定测量对象和尺度，测量的次数是确定的，例如采用直径测量圆周长度，总是大约要测量 3.141 592 6 次. 但是，对于分形几何体，情况就不一样了，分形体没有特征长度. 以二维空间为例，分形的面积不是一个确定的数，面积的大小取决于测量的尺度. 对于严格意义的分形而言，其面积为无穷小，不测也知道，因此测度没有信息. 但是，它的维数不是预知的，需要测量才知道，维数对人们而言才有信息. 可见，测量分形最好采用负幂律形式，以尺度为自变量，测量次数为因变量，面积等以常数的形式隐含在比例系数中间. 需要说明的是，有些地理现象，部分具有分形性质，部分则具有欧氏几何学性质. 例如，岛屿、湖泊、城市化地区，面积是确定的，面域可以用欧氏几何学描述；边界长度不确定，可用分形几何学描述. 对于这类现象，面积的等效圆的半径即其特征尺度，但边界没有特征尺度，可以用分维反映其标度性质.

这里涉及信息的定义. 信息的一个定义就是不确定性的度量. 一个预先知道的事物是没有信息的，只有预先不知道，经过调查才知道的事物，才有信息. 对于欧氏圆来说，无须调查就知道它的维数(2)，但不测量就不知道它的面积. 因此，欧氏圆的信息包含在面积测度之中. 对于分形圆来说，情况反过来，严格的、数学意义的分形圆，其面积为无穷小，不测就知道，它没有信息. 但是，它的维数事先不能判断，必须经过测量才知道它的维数值. 所以，信息在维数之中. 有人认为，分形的判断，在很多情况下是与 Hausdorff 维数进行一种类比. 其实，分形的判断，最根本的是与欧氏维数的一种类比. 无论采用某种尺度度量欧氏几何体，还是度量分形几何体，数学表达式都是一样的：测量结果＝系数×特征尺度^{维数}. 所不同的是，对于欧氏几何体，人们关心的是测量结果而不是维数；对于分形几何体，人们关心的是维数而不是研究对象的某种测度的度量结果(表 1).

表 1　欧氏几何学与分形几何学的测度对比关系

Tab. 1　A comparison between the measures of Euclidean geometry and those of fractal geometry

领域	测量对象	研究对象	数学形式	测量结果	基本特征
欧氏几何	规则现象(点、线、面、体)	形(空间形状与形态)	幂律(幂指数为欧氏维数)	测度值确定 维数没有信息	有特征尺度
分形几何	不规则线性(点、线、面、体)	形与数(形态、功能、格局、过程)	负幂律(幂指数为分维)	测度值不确定 维数有信息	无特征尺度(标度)

4　结束语

这篇文章的目的是说明测量背后的维数概念，进而引申出分维概念. 到此为止，可以总结一下测量与维数的关系. 在实际测量过程中，如果采用“覆盖”的方式量测，测量体(如扑克牌)与被测量体(如桌面)之间要具有相同的量纲. 最后得到的被测体的测度(如桌面面积)等于测量次数乘以测量体的测度(如扑克牌面积). 这个测量次数要么是已知的常数(如圆周率)，要么是无量纲的，故作为比例系数，它是被测体测度与测量体测度之比. 然而，覆盖的方法可以用于理论分析，却不便于实际操作. 如果采用一张竹席去测量一块巨大的水稻田的面积，则是一种糟糕的操作方法. 比较简便的方式是采用最简单的一维测量体来度量，分别沿着彼此正交的方向测量. 如果利用一条绳子测量水稻田的面积，那就简便多了：东西方向测量若干次，南北方向测量若干次，则稻田面积约为不同方向测量次数的乘积(此为比例系数)乘以绳子长度的平方. 这是一种正幂律关系，幂次反映的就是稻田在地球表面的欧氏维数. 可见维数在欧氏几何学中代表测量的独立方向数目. 推而广之，可以判断任意欧氏几何体的维数：点为0维，线为1维，面为2维，体为3维. 欧氏几何体的维数不测可知，因此没有太多的信息.

然而，对于欧氏几何体糟糕的测量方法，对于分形体却是有效的维数估计方法. 分形体没有确定的长度、面积或者体积，从而没有特征尺度，基于欧氏维数的简单测量不起作用. 在这种情况下，可以放弃常规测度的估算，转而计算空间维数. 以电子地图上的城市形态为例，可以采用盒子覆盖之类的方法进行测量，逐步逼近城市面积，然后建立盒子尺度与测量次数的标度关系. 这是一种负幂律关系，幂指数或者说标度指数给出城市形态的分形维数. 维数的数值大于0，小于所在空间的欧氏维数. 利用分维，可以分析被测量体如城市形态的不规则性、分布均衡性、空间填充度、空间关联性以及空间复杂性，如此等等，进而解析系统如城市演化的空间动力学[13-16]. 不仅如此，分形思想可以推广到更一般的城市标度分析，包括城市分形标度、异速标度和城市位序-规模分布的标度分析[17-24]. 分形几何学、异速生长和复杂网络理论正在集成和融合，形成一种解释城市发展的新理论[25].

参考文献：

[1]　GORDON K. The mysteries of mass[J]. Scientific American, 2005, 293(1): 40-46,48.

[2]　HENRY J. The Scientific Revolution and the origins of modern science[M].2nd ed. New York: Palgrave, 2002.

[3]　TAYLOR P J. Quantitative methods in geography [M]. Illinois: Waveland Press, 1977:37.

[4]　LEE Y. An allmetric analysis of the US urban system:1960－1980[J]. Environment and Planning A, 1989, 21(4): 463-476.

[5]　HAYNES A H. Dimensional analysis:Some applications in human geography[J]. Geographical Analysis, 1975, 7(1): 51-68.

[6]　陈彦光.空间相互作用模型的形式、量纲和局域性问题探讨[J].北京大学学报(自然科学版),2009, 45(2):333-338.
CHEN Yanguang. On the mathematical form, dimension, and locality of the spatial interaction model[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, 2009, 45(2): 333-338.

[7]　CHEN Y G. The distance-decay function of geographical gravity model:Power law or exponential law? [J].Chaos, Solitons & Fractals,2015, 77: 174-189.

[8]　蔡运龙,陈彦光,阙维民,等.地理学:科学地位与社会功能[M].北京:科学出版社,2012.
CAI Yunlong, CHEN Yanguang, QUE Weimin, et al. Geography:Scientific status and social functions[M]. Beijing: Science Press, 2012.

[9]　陈彦光.城市异速标度研究的起源、困境和复兴[J].地理研究,2013, 32(6):1033-1045.
CHEN Yanguang. The rise,fall,and revival process of allometric scaling analysis in urban studies[J]. Geographical Research, 2013, 32(6): 1033-1045.

[10]　GOODCHILD M F. Geographical information science[J]. International Journal of Geographical Information Systems, 1992, 6(1): 31-45.

[11]　陈彦光.地理学是一门空间信息科学[J].信阳师范学院学报(自然科学版),1994, 7(2):217-220.
CHEN Yanguang. Geography is a kind of spatial information science[J]. Journal of Xinyang Teachers College(Natural Science Edition), 1994, 7(2): 217-220.

[12] BYA Ryabko. Noise-free coding of combinatorial sources, Hausdorff dimension and Kolmogorov complexity[J]. Problemy Peredachi Informatsii, 1986, 22(3): 16-26.
[13] CHEN Y G. The solutions to uncertainty problem of urban fractal dimension calculation[J]. Entropy, 2019, 21:453.
[14] CHEN Y G. Logistic models of fractal dimension growth of urban morphology[J]. Fractals, 2018, 26(3): 1850033.
[15] CHEN Y G, FENG J. Spatial analysis of cities using Renyi entropy and fractal parameters[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 105: 279-287.
[16] CHEN Y G, HUANG L S. Modeling growth curve of fractal dimension of urban form of Beijing[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2019, 523: 1038-1056.
[17] ARCAUTE E, HATNA E, FERGUSON P, et al. Constructing cities, deconstructing scaling laws[J]. Journal of the Royal Society Interface, 2015, 12(102): 20140745.
[18] BETTENCOURT L M A. The origins of scaling in cities[J]. Science, 2013, 340: 1438-1441.
[19] CHEN Y G. Multi-scaling allometric analysis for urban and regional development[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2017, 465: 673-689.
[20] JIANG B. The image of the city out of the underlying scaling of city artifacts or locations[J]. Annals of the Association of American Geographers, 2013, 103(6): 1552-1566.
[21] LOBO J, BETTENCOURT LM A, STRUMSKY D,et al. Urban scaling and the production function for cities[J]. PLoS ONE, 2013, 8(3): e58407.
[22] LOUF R, BARTHELEMY M. How congestion shapes cities: from mobility patterns to scaling[J]. Scientific Reports, 2014, 4: 5561.
[23] 陈彦光.城市产业规模分布的等级标度分析[J].信阳师范学院学报(自然科学版),2016,29(1):62-66.
CHEN Y G. A new approach to hierarchical scaling analysis of firm sizes[J]. Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition), 2016, 29(1): 62-66.
[24] 陈彦光.信阳地理位置特征和经济发展约束分析[J].信阳师范学院学报(自然科学版),2018,31(2):208-215.
CHEN Y G. A preliminary analysis of geographical location and economic development constraints of Xinyang[J]. Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition), 2018, 31(2): 208-215.
[25] BATTY M. The size, scale, and shape of cities[J]. Science, 2008, 319: 769-771.

责任编辑:张建合

(上接第 45 页)

[8] Hoveland C S. Importance and economic significance of the Acremonium endophytes to performance of animals and grass plant[J]. Agriculture,Ecosystems and Environment,1993, 44(1/2/3/4): 3-12.
[9] 卢东升, 任雨轩, 周营, 等. 空心莲子草内生真菌多样性研究[J].信阳师范学院学报(自然科学版),2018,31(2):227-232.
LU Dongsheng, REN Yuxuan, ZHOU Ying, et al. Diversity of endophytic fungi in *Alternanthera philoxeroides* [J]. Journal of Xinyang Normal University(Natural Science Edition), 2018, 31 (2): 227-232.
[10] 魏景超.真菌鉴定手册[M].上海: 上海科学技术出版社, 1979.
WEI Jingchao. Fungi identification manual [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1979.
[11] 戴芳澜. 真菌的形态和分类[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
DAI Fanglan. Morphology and classification of Fungi [M]. Beijing: Science Press, 1987.
[12] 邵力平, 沈瑞祥, 张素轩. 真菌分类学[M].北京: 中国林业出版社, 1984.
SHAO Liping, SHEN Ruixiang, ZHANG Suxuan. Fungal taxonomy [M]. Beijing: China Forestry Press, 1984.
[13] 孙剑秋, 郭良栋, 臧威, 等. 药用植物内生真菌多样性及生态分布[J].中国科学 C 辑: 生命科学, 2008, 38(5) : 475-484.
SUN Jianqiu, GUO Liangdong, ZAN Gwei, et al. Diversity and ecological distribution of endophytic fungi in medicinal plants [J]. Chinese Science Series C: Life Science, 2008, 38 (5): 475-484.
[14] 臧威,孙翔,孙剑秋,等. 南方红豆杉内生真菌的多样性与群落结构[J].应用生态学报,2014,25 (7): 2071-2078.
ZANG Wei, SUN Xiang, SUN Jianqiu, et al. Diversity and community structure of endophytic fungi in *Taxus chinensis* var *mairei*. [J]. Chinese Journal of Applied Ecology, 2014, 25(7): 2071-2078.

责任编辑:任长江