

一类求解浅水波方程的基本无振荡熵稳定格式

刘友琼^a, 刘庆升^{a*}, 荣宪举^b, 黄封林^a

(信阳师范学院 a. 数学与统计学院; b. 科学技术处, 河南 信阳 464000)

摘要:针对浅水波方程, 提出了一类低耗散基本无振荡熵稳定格式. 在 Roe 型熵稳定通量中添加熵守恒格式的熵数值黏性绝对值的量来抵消解在跨过激波时所产生的熵增, 从而抑制伪振荡; 并且, 利用通量限制器函数构造出相应的高分辨率熵稳定格式. 利用新格式模拟一维和二维经典问题, 数值结果表明, 该格式具有低耗散、高分辨率、基本无振荡性等特点, 是求解浅水波方程较为理想的方法.

关键词:浅水波方程; 低耗散; 高分辨率; 熵稳定格式

中图分类号: O354; O241.82

文献标志码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Non-oscillatory Entropy Stable Scheme for Shallow Water Equations

LIU Youqiong^a, LIU Qingsheng^{a*}, RONG Xianju^b, HUANG Fenglin^a

(a. College of Mathematics and Statistics; b. Office of Science and Technology,

Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China)

Abstract: A low dissipative non-oscillatory entropy stable scheme is presented for shallow water equations. The scheme is given to construct entropy stable flux by addition of the entropy viscosity term of entropy conservative flux into Roe's entropy stable flux, to controlling entropy production at discontinuities, which result have enough entropy dissipative to remove oscillations near discontinuity. Further, high resolution entropy stable flux is constructed for the flux limiter functions. These new fluxes is tested on one dimensional and two dimensional problems, numerical examples demonstrate that these schemes are low dissipative, high resolution and non-oscillatory.

Key words: shallow water equations; low dissipative; high resolution; entropy stable flux

0 引言

浅水波方程是各种浅水环境流体运动的数学描述, 可以通过对浅水波方程进行数值求解来研究诸如潮汐、涌浪、溃坝和水环境污染扩散等热点问题. 浅水波方程属于双曲守恒律方程, 其非线性性质使得数值方法的稳定性很难保证. TADMOR 在文献[1]定义了一类二阶的熵守恒格式, 由此得到一种对数值黏性更精确的量化方法, 即: 一个三点格式只需含有比熵守恒格式更多的黏性则是熵稳定的. 熵守恒/熵稳定格式的提出为获得具有物理意义、数值上稳定的解提供了一种简便有效的方法, 而且更便于推广和应用. TADMOR 进一步提出分段线性路径的熵稳定格式^[2], 适用于 Navier-Stokes

方程^[3]、浅水波方程^[4]等各种守恒系统. 熵稳定格式的构造主要基于熵守恒通量和数值耗散项, 但是基于 Roe 格式数值黏性项的熵稳定格式并没有完全消除间断前后的伪振荡. 为此, 2009 年, ISMAIL 和 ROE^[5]以一维无黏 Burgers 方程为研究对象, 从熵增的定义出发, 得到了该方程跨过激波的确切熵增量; 进而在熵稳定格式的基础上再补充一个特征速度差分的绝对值的量来抵消此熵增, 从而得到了可以完全消除振荡的熵相容格式(EC1), 并启发式地推导出求解欧拉方程的熵相容格式. 显然熵相容格式依然是熵稳定的, 熵相容格式的目的是尽量使熵的耗散刚好抵消掉间断附近的伪振荡. 2013 年, MOHAMMED 等^[6]将与人工物理耗散机制相结合的熵相容格式推广应用于一维黏性 Burgers 方程

收稿日期: 2018-12-02; 修订日期: 2019-04-18; * 通信联系人, E-mail: qingsheng408@163.com

基金项目: 国家自然科学基金项目(11601466); 河南省科技计划项目(182102210538); 信阳师范学院青年科研基金项目(2018-QN-041); 河南省高等学校重点科研项目(18B520036, 18A130001); 信阳师范学院“南湖学者奖励计划”青年项目

作者简介: 刘友琼(1989—), 女, 云南曲靖人, 助教, 硕士, 主要从事科学与工程计算研究; 刘庆升(1982—), 男, 河南驻马店人, 讲师, 博士, 主要从事科学与工程计算研究.

及 Navier-Stokes 方程.在 Roe 格式的基础上,我们前期的研究^[7-9]是通过利用限制器函数构造了一些行之有效的分辨率熵稳定/熵相容格式,并应用于双曲守恒律方程的计算.程晓晗等^[10,11]、郑素佩等^[12,13]通过结合熵稳定格式和 WENO 重构方法,构造了分辨率的熵稳定格式.研究中我们发现,以上熵稳定格式/熵相容格式求解一般的浅水波方程具有较好的效果,但是求解具有弗劳德数(Froude number)的初始值问题时,间断前后出现了伪振荡.为了完全消除该类问题间断前后的伪振荡,我们对熵稳定格式进行修正,以实现对该类问题的准确求解,并将修正后的熵稳定格式应用于二维溃坝问题来验证算法的有效性,进而将该算法推广应用于二维溃坝问题.

本文针对一维浅水波方程构造一类熵稳定格式,并利用通量限制器函数构造分辨率熵稳定格式,将建立的格式应用于一维和二维的初始值问题来验证方法的有效性.本文采用空间半离散格式,时间上的推进采用三阶强稳定的 Runge-Kutta 方法:^[14]

$$\begin{cases} \mathbf{V}_i^* = \mathbf{U}_i^k + \Delta t L(\mathbf{U}_i^k), \\ \mathbf{U}_i^{**} = \frac{3}{4}\mathbf{U}_i^k + \frac{1}{4}\mathbf{U}_i^* + \frac{\Delta t}{4}L(\mathbf{U}_i^*), \\ \mathbf{U}_i^{k+1} = \frac{1}{3}\mathbf{U}_i^k + \frac{2}{3}\mathbf{U}_i^{**} + \frac{2\Delta t}{3}L(\mathbf{U}_i^{**}). \end{cases} \quad (1)$$

1 数值方法

考虑一维无黏浅水波方程初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{f}(\mathbf{U}) = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (2)$$

其中:守恒型变量 $\mathbf{U} = [h, uh]^T$, 通量 $\mathbf{f}(\mathbf{U}) = [hu, \frac{1}{2}gh^2 + hu^2]^T$, $h = h(x, t)$ 是总的水深, $u(x, t)$ 是深度平均速度, g 是重力加速度.式(2)具有物理意义的唯一弱解需要满足熵不等式:

$$E(\mathbf{U})_t + H(\mathbf{U})_x \leq 0, \quad (3)$$

其中: $E(\mathbf{U})$ 是熵函数; $H(\mathbf{U})$ 满足

$$H'(\mathbf{U})^T = E'(\mathbf{U})^T \mathbf{f}'(\mathbf{U})$$

是熵通量函数.在空间方向采用等距网格划分,控制单元 $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, $\Delta x \doteq x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, x_i 为单元 I_i 的中点,则求解式(2)的守恒型半离散格式为

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}_i(t) = -\frac{1}{\Delta x}(\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{f}}_{i-\frac{1}{2}}), \quad (4)$$

该格式中的 $\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}}$ 是一个满足

$$\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \dots, \mathbf{U}) = \mathbf{f}(\mathbf{U})$$

相容的数值通量函数,其对应的熵稳定条件变为式(3)的半离散形式.

对于一维浅水波方程,取内能和势能的总和作为熵函数,即 $E(\mathbf{U}) = (gh^2 + u^2h)/2$.计算得熵通量函数 $H(\mathbf{U}) = guh^2 + u^3h/2$.熵变量 $\mathbf{V} = E'(\mathbf{U}) = [gh - u^2/2, u]^T$,熵势 $\psi = \frac{1}{2}guh^2$.熵不等式为

$$\frac{d}{dt} \int_x E dx \leq 0. \quad (5)$$

在单元交界面处的熵增定义为

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \iint_{\Omega} (\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{H}) dx dt = \\ &\oint_{\partial \Omega} (\mathbf{U} dx - \mathbf{H} dt), \Omega \in [0, \infty) \times \mathbf{R}. \end{aligned}$$

实际物理问题中,跨过激波时熵是增加的,但是在数学模型中,通常熵增表现为一个耗散或色散的过程,数学上由一些较小的参数乘以高阶导数来表示,所以要求所采用的数值方法必须引起熵的耗散,才能达到熵稳定的要求.

1.1 熵稳定格式

熵守恒格式保持总熵不变,满足离散熵等式, TADMOR 在文献[2]中给出了一种构造熵守恒格式的方法,即熵守恒数值通量 $\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^c$ 满足

$$\begin{aligned} [\mathbf{V}]_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^c &= [\psi]_{i+\frac{1}{2}}, \\ [\psi]_{i+\frac{1}{2}} &\doteq \psi(\mathbf{V}_{i+1}) - \psi(\mathbf{V}_i), \end{aligned} \quad (6)$$

且具有二阶精度. $\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^c$ 也可以写成沿熵变量空间内路径 $\mathbf{V}_{i+\frac{1}{2}}(\xi) = \bar{\mathbf{V}}_{i+\frac{1}{2}} + \xi[\mathbf{V}]_{i+\frac{1}{2}}$ 的积分形式

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^c = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}(\mathbf{V}_{i+\frac{1}{2}}(\xi)) d\xi. \quad (7)$$

FJORDHOLM 等^[15]根据浅水波方程自身的特点,构造了简单的显式熵守恒格式 EEC(Explicit Energy Conserving),其数值通量如下:

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^c = \begin{bmatrix} \bar{h}_{i+\frac{1}{2}} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} g \bar{h}_{i+\frac{1}{2}}^2 + \bar{h}_{i+\frac{1}{2}} \bar{u}_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \overline{(\cdot)}_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{(\cdot)_i + (\cdot)_{i+1}}{2}, \\ \overline{(\cdot)^2}_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{(\cdot)_i^2 + (\cdot)_{i+1}^2}{2}. \end{aligned}$$

由相应格式得到的解保持离散总熵 $S = \Delta x \sum_i E(u_i)$ 不变,熵增为 0. 对于标量方程,沿相空间内的积分路径只有直线形式,所以其数值通量具有唯一形式. 对于守恒律系统,由于积分路径选择的任意性,熵守恒数值通量形式不唯一.

熵守恒数值通量 $f_{i+\frac{1}{2}}^c$ 在解的光滑区域表现良好,但在解的间断位置产生了强烈的振荡现象,为了避免这种色散效应,需要添加适当的数值黏性来保持总熵耗散. 将 Roe 格式的数值黏性项补充到熵守恒格式^[15],可得满足离散熵不等式的熵稳定数值通量为

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{\text{ERoe}} = f_{i+\frac{1}{2}}^c - \frac{1}{2} \hat{R} |\hat{\Lambda}| \hat{R}^T [V]_{i+\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

其中 $\hat{R}, \hat{\Lambda}$ 分别为

$$\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \bar{u}_{i+1/2} - \sqrt{g\bar{h}_{i+1/2}} & \bar{u}_{i+1/2} + \sqrt{g\bar{h}_{i+1/2}} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Lambda} = \text{diag}(\bar{u}_{i+1/2} - \sqrt{g\bar{h}_{i+1/2}}, \bar{u}_{i+1/2} + \sqrt{g\bar{h}_{i+1/2}}).$$

将 ISMAIL 等^[5] 构造的熵相容通量启发式地推广到浅水波方程,得到求解一维浅水波方程组(2)的熵相容(熵稳定)数值通量^[9]如下:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{\text{EC}} = f_{i+\frac{1}{2}}^c - \frac{1}{2} \hat{R} (|\hat{\Lambda}| + \alpha |[A]|) \hat{R}^T [V]_{i+\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{6}, [A] = \text{diag}(\lambda_{i+1}^1 - \lambda_i^1, \lambda_{i+1}^2 - \lambda_i^2),$$

$$\lambda_i^1 = u_i - \sqrt{gh_i}, \lambda_i^2 = u_i + \sqrt{gh_i}.$$

1.2 修正的熵稳定格式

前期研究^[7-10]表明,Roe 型的熵稳定格式(ERoe)及 Ismail 型的熵相容/熵稳定格式(EC)对于求解一般的部分溃坝问题表现良好,消除了间断附近的伪振荡. 但是当我们用这两个熵稳定格式求解具有弗劳德数(Froude number)的初始值问题时,间断前后出现了伪振荡,且当弗劳德数取值为 15 时,熵稳定 ERoe 格式计算失败,数值计算结果出现复数,如图 1(a)、(b) 所示. 这表明我们需要修正熵稳定格式,使其在间断附近产生足够的耗散来抑制振荡.

满足式(6)的任意熵守恒数值通量 $f_{i+\frac{1}{2}}^c$ 都可由积分形式(7)通过分部积分法而改写成等价的熵黏性形式^[2]:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^c = \bar{f}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} Q_{i+\frac{1}{2}}^* [V]_{i+\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

其中熵黏性矩阵 $Q_{i+\frac{1}{2}}^*$ 为

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^* = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2\xi B(V_{i+\frac{1}{2}}(\xi)) d\xi, \quad (12)$$

其中 $B(V)$ 是数值通量关于熵变量的导数,对于初值问题(2)其可简化为

$$B(V) = f_u U_V = RAR^{-1}RR^T = RAR^T.$$

由式(11),我们既可以通过已构造的熵守恒数值通量得到熵黏性;也可先通过式(12)求得熵黏性,再由式(11)构造出熵守恒数值通量. 对于一维浅水波方程,由式(12)积分可得显式的熵黏性式(13):

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{6g} \begin{bmatrix} [u]_{i+\frac{1}{2}} & [gh + u^2]_{i+\frac{1}{2}} \\ [gh + u^2]_{i+\frac{1}{2}} & 3g[hu]_{i+\frac{1}{2}} + 3\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^2[u]_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

我们考虑将熵黏性项添加到熵稳定格式(9)中,得到修正的熵稳定数值通量为

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{\text{ES}} = f_{i+\frac{1}{2}}^c - \frac{1}{2} (\hat{R} |\hat{\Lambda}| \hat{R}^T + |Q_{i+\frac{1}{2}}^*|) [V]_{i+\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

将该格式记为 ES 格式.

1.3 高分辨率熵稳定格式

本文修正的熵稳定格式(14)可以精确地捕捉到静态激波,但在解的拐角处及接触间断都有轻微耗散. 类似于文献[5,7,16],我们采用通量限制器来提高分辨率,避免解在间断位置的过渡抹平. 定义高分辨率熵稳定数值通量为

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{\text{HRS}} = f_{i+\frac{1}{2}}^c - \frac{1}{2} (\hat{R} |\hat{\Lambda}| \hat{R}^T (I - \Phi) + |Q_{i+\frac{1}{2}}^*|) [V]_{i+\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

该数值通量对应的格式为高分辨率熵稳定格式,记为 HRS 格式,其中 I 为单位矩阵, $\Phi = \text{diag}(\varphi(\theta^1), \varphi(\theta^2))$, 参数 θ^k 由熵变量计算得到,即

$$\theta^k = \frac{r^k \cdot (V_{I+1} - V_I)}{r^k \cdot (V_{I+1} - V_i)},$$

$$I = \begin{cases} i-1, & \lambda_{i+\frac{1}{2}}^k > 0, \\ i+1, & \lambda_{i+\frac{1}{2}}^k < 0. \end{cases} \quad (16)$$

其中: $\lambda_{i+\frac{1}{2}}^k (k=1,2)$ 是方程(2)的 Jacobi 矩阵 $A_{i+\frac{1}{2}}$ 的第 k 个特征值, r^k 是对应的右特征向量. 对任意 θ , 通量限制器函数满足 $0 \leq \varphi(\theta) \leq 1$. 本文的数值模拟选用经典的 Minmod 限制器来保证格式(15)满足熵稳定条件^[7].

2 二维推广

考虑二维浅水波方程

$$U_t + f(U)_x + g(U)_y = 0, \quad (17)$$

其中守恒型向量 $U = [h, hu, hv]^T$, 通量分别为

$$f(U) = \left[hu, hu^2 + \frac{1}{2}gh^2, huv \right]^T,$$

$$g(U) = \left[hv, huv, hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right]^T.$$

式中: $h = h(x, t)$ 是总的水深; $u(x, t), v(x, t)$ 分别是 x, y 方向的深度平均速度; g 是重力加速度. 在空间上采用等距矩形网格划分, 则求解式(17)的守恒型半离散格式为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U_i(t) = & -\frac{1}{\Delta x}(\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2},j}) - \\ & \frac{1}{\Delta y}(\hat{g}_{i,j+\frac{1}{2}} - \hat{g}_{i,j-\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (18)$$

取总能 $E(U) = (gh^2 + u^2h + v^2h)/2$ 作为熵函数, 熵通量

$$H^x(U) = guh^2 + (u^3h + uv^2h)/2 - hu u_x,$$

$$H^y(U) = ghv^2 + (u^2vh + v^3h)/2 - hv v_y,$$

则熵变量为

$$V = \left[gh - \frac{1}{2}(u^2 + v^2), u, v \right]^T.$$

类似于一维情况的处理方式, 可得求解二维浅水波方程修正的熵稳定数值通量为

$$\begin{cases} \hat{f}_{i+\frac{1}{2},j}^{ES} = \hat{f}_{i+\frac{1}{2},j}^C - \frac{1}{2}(\hat{R}_x |\hat{\Lambda}_x | \hat{R}_x^T + |\hat{Q}_x^*|)[V]_{i+\frac{1}{2},j}, \\ \hat{g}_{i,j+\frac{1}{2}}^{ES} = \hat{g}_{i,j+\frac{1}{2}}^C - \frac{1}{2}(\hat{R}_y |\hat{\Lambda}_y | \hat{R}_y^T + |\hat{Q}_y^*|)[V]_{i,j+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j}^C = \bar{f}_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{1}{2}Q_x^* [V]_{i+\frac{1}{2},j},$$

$$\hat{g}_{i,j+\frac{1}{2}}^C = \bar{g}_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}Q_y^* [V]_{i,j+\frac{1}{2}},$$

$$Q_x^* = \frac{1}{6g} \begin{bmatrix} q_{11}^x & q_{12}^x & q_{13}^x \\ q_{12}^x & q_{22}^x & q_{23}^x \\ q_{13}^x & q_{23}^x & q_{33}^x \end{bmatrix},$$

$$Q_y^* = \frac{1}{6g} \begin{bmatrix} q_{11}^y & q_{12}^y & q_{13}^y \\ q_{12}^y & q_{22}^y & q_{23}^y \\ q_{13}^y & q_{23}^y & q_{33}^y \end{bmatrix},$$

$$q_{11}^x = [u], q_{12}^x = [gh + u^2], q_{13}^x = [uv],$$

$$\begin{aligned} q_{22}^x = & -\frac{3}{20}(20g(h_l u_l - h_r u_r) + \\ & (u_l - u_r)(5u_l^2 + 10u_l u_r + \\ & 5u_r^2 - (v_l - v_r)^2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{23}^x = & \frac{1}{20}(-20g(h_l v_l - h_r v_r) - \\ & u_l^2(17v_l + 3v_r) + 6u_l u_r(v_r - v_l) + \\ & 3u_r^2 v_l + 17u_r^2 v_r + v_l^3 - 3v_l^2 v_r + 3v_l v_r^2 - v_r^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{33}^x = & \frac{1}{20}(-20g(h_l u_l - h_r u_r) + \\ & u_l^3 - 3u_l^2 u_r + \\ & u_l(3u_r^2 - 17v_l^2 - 6v_l v_r + 3v_r^3) - \\ & u_r(u_l^2 + 3v_l^2 - 6v_l v_r - 17v_r^2)), \end{aligned}$$

$$q_{11}^y = [v], q_{12}^y = [uv], q_{13}^y = [gh + v^2],$$

$$q_{22}^y = q_{23}^y, q_{23}^y = q_{33}^y,$$

$$\begin{aligned} q_{33}^y = & \frac{3}{20}((v_l - v_r)(u_l^2 - 2u_l u_r + u_r^2 - \\ & 5(v_l + v_r)^2) - \\ & 20g(h_l v_l - h_r v_r)). \end{aligned}$$

$$\hat{R}_x = \frac{1}{\sqrt{2g}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \sqrt{gh_{i+\frac{1}{2},j}} & 0 & \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j} + \sqrt{gh_{i+\frac{1}{2},j}} \\ \bar{v}_{i+\frac{1}{2},j} & \sqrt{2gh_{i+\frac{1}{2},j}} & \bar{v}_{i+\frac{1}{2},j} \end{bmatrix},$$

$$\hat{R}_y = \frac{1}{\sqrt{2g}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \bar{u}_{i,j+\frac{1}{2}} & -\sqrt{2gh_{i,j+\frac{1}{2}}} & \bar{u}_{i,j+\frac{1}{2}} \\ \bar{v}_{i,j+\frac{1}{2}} - \sqrt{gh_{i,j+\frac{1}{2}}} & 0 & \bar{v}_{i,j+\frac{1}{2}} + \sqrt{gh_{i,j+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Lambda}_x = \text{diag}(\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \sqrt{gh_{i+\frac{1}{2},j}}, \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}, \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j} + \sqrt{gh_{i+\frac{1}{2},j}}),$$

$$\bar{\Lambda}_y = \text{diag}(\bar{v}_{i,j+\frac{1}{2}} - \sqrt{gh_{i,j+\frac{1}{2}}}, \bar{v}_{i,j+\frac{1}{2}}, \bar{v}_{i,j+\frac{1}{2}} + \sqrt{gh_{i,j+\frac{1}{2}}}),$$

其中运算符定义为

$$[z]_{i+\frac{1}{2},j} = z_{i+1,j} - z_{i,j}, [z]_{i,j+\frac{1}{2}} = z_{i,j+1} - z_{i,j},$$

$$\bar{z}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{z_{i+1,j} + z_{i,j}}{2}, \bar{z}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{z_{i,j+1} + z_{i,j}}{2}.$$

为了提高格式的分辨率, 避免在间断位置的过渡抹平, 分别在 x 和 y 方向采用通量限制器来提高分辨率, 于是可得高分辨率熵稳定数值通量为

$$\begin{cases} \hat{f}_{i+\frac{1}{2},j}^{HRS} = \hat{f}_{i+\frac{1}{2},j}^C \\ \quad - \frac{1}{2}(\hat{R}_x |\hat{\Lambda}_x | \hat{R}_x^T (I - \Phi_x) + |\hat{Q}_x^*|)[V]_{i+\frac{1}{2},j}, \\ \hat{g}_{i,j+\frac{1}{2}}^{HRS} = \hat{g}_{i,j+\frac{1}{2}}^C \\ \quad - \frac{1}{2}(\hat{R}_y |\hat{\Lambda}_y | \hat{R}_y^T (I - \Phi_y) + |\hat{Q}_y^*|)[V]_{i,j+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (20)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \text{diag}(\varphi(\theta_x^1), \varphi(\theta_x^2), \varphi(\theta_x^3)), \\ \Phi_y &= \text{diag}(\varphi(\theta_y^1), \varphi(\theta_y^2), \varphi(\theta_y^3)), \\ \theta_x^k &= \frac{\mathbf{r}_x^k \cdot (\mathbf{V}_{i+1,j} - \mathbf{V}_{i,j})}{\mathbf{r}_x^k \cdot (\mathbf{V}_{i+1,j} - \mathbf{V}_{i,j})}, I = \begin{cases} i-1, & \lambda_x^k > 0, \\ i+1, & \lambda_x^k < 0, \end{cases} \\ \theta_y^k &= \frac{\mathbf{r}_y^k \cdot (\mathbf{V}_{i,j+1} - \mathbf{V}_{i,j})}{\mathbf{r}_y^k \cdot (\mathbf{V}_{i,j+1} - \mathbf{V}_{i,j})}, J = \begin{cases} j-1, & \lambda_y^k > 0, \\ j+1, & \lambda_y^k < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

式中: \mathbf{r}_x^k 及 \mathbf{r}_y^k 分别是 Jacobi 矩阵 $\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2},j}^x, \mathbf{A}_{i+\frac{1}{2},j}^y$ 的第 k 个特征值 λ_x^k, λ_y^k 对应的右特征向量.

3 数值模拟

下面算例 3.1 ~ 3.5 均采用无量纲计算.

3.1 含有弗劳德数的初始值问题^[16]

在区域 $[-1.5, 1.5]$ 上求解初值问题:

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= \begin{cases} h_l, & x < 0, \\ \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 8u_l^2}), & x > 0, \end{cases} \\ u(x, 0) &= \begin{cases} u_l, & x < 0, \\ \frac{1}{4u_l}(1 + \sqrt{1 + 8u_l^2}), & x > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

其中: $h_l = 1; g$ 无量纲化后取 1; $u_l = Fr\sqrt{gh_l}, Fr$ 为入口弗劳德数. 取 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件数为 0.02, 空间网格数为 25, 计算到 $t = 0.03$. 图 1 给出了速度计算结果. 由图 1 可知, 熵稳定 ERoe、EC 格式在间断前出现了越过点, 修正后的熵稳定 ES 格式及高分辨率熵稳定 HRS 格式能准确地捕捉解的结构, 产生足够的耗散来消除伪振荡.

3.2 溃坝问题^[14]

在区域 $[-1, 1]$ 上求解初值问题:

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \\ u(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

取 CFL 条件数为 0.02, 空间网格数为 100, 计算到 $t = 0.4$. 精确解由左行稀疏波和右行激波组成. 图 2 给出了水深及速度的计算结果. 由图 2 可知, 本文构造的熵稳定 ES 格式及高分辨率熵稳定 HRS 格式能准确地捕捉解的结构, 且 HRS 格式具有更高的分辨率, 避免了解在拐角处及间断位置的过渡抹平, 达到了预期效果.

3.3 大型溃坝问题^[14]

在区域 $[-1, 1]$ 上求解初值问题:

$$h(x, 0) = \begin{cases} 15, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

$$u(x, 0) = 0.$$

取 CFL 条件数为 0.02, 空间网格数为 100, 计算到 $t = 0.1$. 精确解由左行稀疏波和右行激波组成. 由图 3 可知, 本文构造的熵稳定 ES 格式及高分辨率熵稳定 HRS 格式能成功地模拟大型溃坝问题, 且 HRS 格式具有更高的分辨率, 再次验证了格式的适用性.

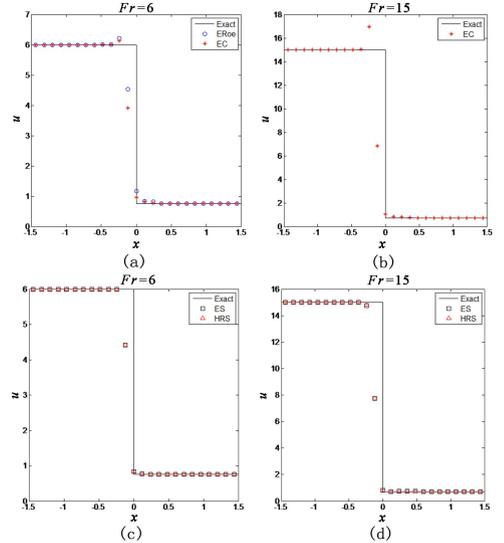


图 1 含有弗劳德数的初始值问题

Fig. 1 Solution of (2) with inlet Froude number

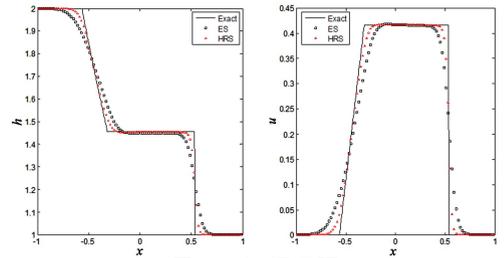


图 2 溃坝问题

Fig. 2 Solution of the dam break problem

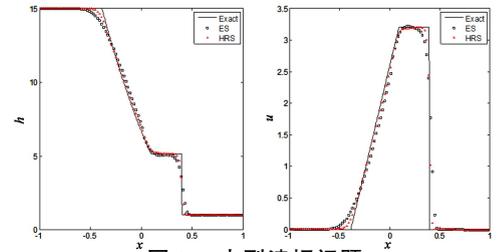


图 3 大型溃坝问题

Fig. 3 Solution of a large dam break problem

3.4 二维浅水波方程组圆形溃坝问题^[15]

在区域 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 上求解初值问题:

$$h(x, y, 0) = \begin{cases} 2, & \sqrt{x^2 + y^2} < 0.5, \\ 1, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$u(x, y, 0) \equiv v(x, y, 0) \equiv 0.$$

采用 Neumann 边界条件, 取 CFL 条件数为

0.25,重力加速度为 $g = 1$,空间网格数为 100×100 ,计算时间到 $t = 0.2$.水深高度的精确解由向内的稀疏波和向外的激波组成.图4给出了水流曲面图和水深等值线图.从图4可以看出:修正的熵稳定ES格式及高分辨率熵稳定HRS格式均能准确地计算圆形溃坝问题,且保持数值结果稳定、无非物理振荡产生,HRS格式较ES格式分辨率更高(激波过渡带更窄,这可从图4的水深等值线图看出).

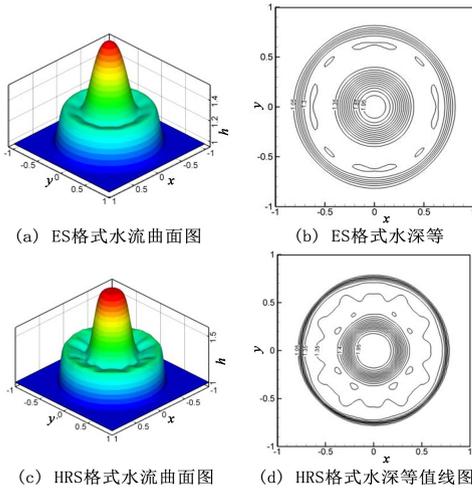


图4 圆形溃坝问题的水流曲面图、水深等值线图

Fig. 4 Surface, contours of water height for the circular dam break problem

3.5 二维浅水波方程组激波聚焦问题^[12]

求解区域为方形区域 $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$,初始条件满足:

$$h(x, y, 0) = \begin{cases} 0.1, & \sqrt{x^2 + y^2} < 0.35, \\ 1, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$u(x, y, 0) \equiv v(x, y, 0) \equiv 0.$$

采用 Neumann 边界条件,取 CFL 条件数为 0.25,重力加速度为 $g = 1$,空间网格数为 100×100 ,计算时间到 $t = 1$.由图5所示的水流曲面图和水深等值线图可以看出,两种格式所得数值结果的对称性都很好,相对于ES格式,HRS格式的分辨率更高,对激波捕捉更加精确(过渡带更窄),这可由图5中的等值线图看出.

3.6 二维浅水波方程组部分溃坝问题^[15]

该问题由 Fennema 及 Chaudhry 首次提出.考虑等宽矩形 (1400×1400) 平底二维水域,中间位置有一固定无摩擦水坝,上下游均为静水,水深分别为 10 和 9.5,计算区域的四周采用 Neumann 边界条件,沿着中间位置的水坝采用反射边界条件.水坝从 560 到 840 之间自初始时刻起瞬时溃决,取空间网格数为 100×100 ,空间步长为 28,时间步长为

0.2,重力加速度为 $g = 9.8$,计算到 $t = 50$.图5依次给出了HRS格式及ES格式的水流曲面图和水深等值线图.由图6所示结果可以看出:本文所构造的两种格式均能有效地抑制了振荡,很好地模拟了坝体倒塌后 50 s 流体的运动情况.

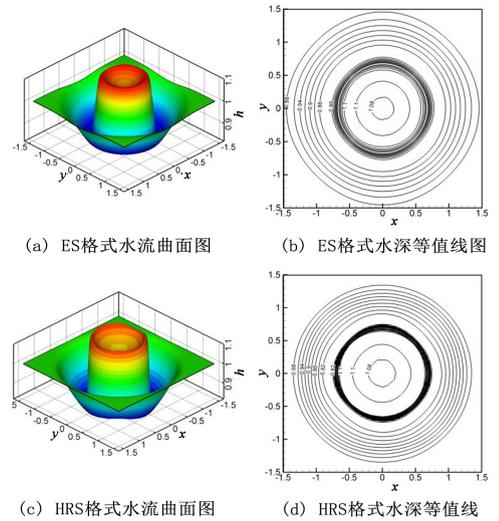


图5 激波聚焦问题的水流曲面图、水深等值线图

Fig. 5 Surface, contours of water height for the shock focusing problem

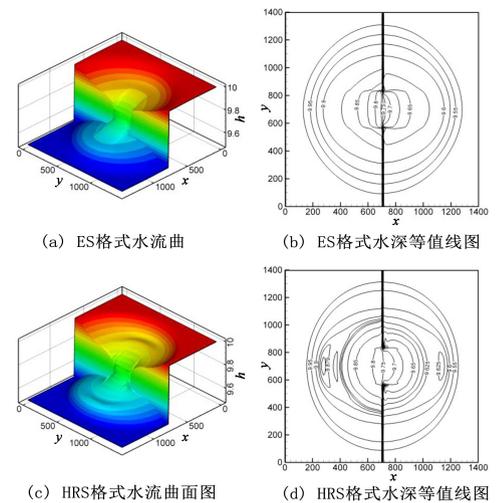


图6 部分溃坝问题的水流曲面图、水深等值线图

Fig. 6 Surface, contours of water height for the partial dam break problem

4 结论

本文首先针对具有弗劳德数(Froude number)的浅水波方程初始值问题的数值求解,构造了一类低耗散基本无振荡的熵稳定ES格式,并利用通量限制器函数构造出相应的高分辨率熵稳定HRS格式.其次将所构造的格式应用于一维溃坝问题来验证算法有效性,进而将该算法推广应用于二维溃坝问题.通过对若干算例的数值模拟,得到如下主要

结论:

(1) 本文构造的熵稳定格式能准确模拟具有弗劳德数(Froude number)的浅水波方程初始值问题,较 Roe 型的熵稳定格式(ERoe)及 Ismail 型的熵相容格式(EC)更具有广泛的适用性.

(2) 本文构造的熵稳定格式适用于一维、二维溃坝问题的数值求解,所得结果可靠.

(3) 本文构造的熵稳定格式数值结果稳定,无非物理振荡产生.

参考文献:

- [1] TADMOR E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws I [J]. *Mathematics of Computation*, 1987, 49(179): 91-103.
- [2] TADMOR E. Entropy stability theory for difference approximation of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems[J]. *Acta Numer*, 2003,12: 451-512.
- [3] TADMOR E, ZHONG Weigang. Entropy stable approximations of Navier-Stokes equations with no artificial numerical viscosity[J]. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 2006, 3(3): 529-559.
- [4] TADMOR E, ZHONG W. Energy preserving and stable approximations for the two-dimensional shallow water equations[C]// *Mathematics and Computation: A Contemporary View, Proc of the third Abel symposium, Alesund, Norway, Springer, 2008, 3:67-94.*
- [5] ISMAIL F, ROE P L. Affordable, entropy-consistent Euler flux functions II: Entropy production at shocks[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(15): 5410-5436.
- [6] MOHAMMED A N, ISMAIL F. Study of an entropy-consistent Navier-Stokes flux[J]. *J Computational Fluid Dynamics*, 2013, 27(1): 1-14.
- [7] LIU Youqiong, FENG Jianhu, REN Jiong. High resolution, entropy-consistent scheme using flux limiter for hyperbolic systems of conservation Laws[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2015, 64(3): 914-937.
- [8] 任炯,封建湖,刘友琼,等.求解双曲守恒律方程的高分辨率熵相容格式[J]. *计算物理*, 2014, 31(5): 539-551.
REN Jiong, FENG Jianhu, LIU Youqiong, et al. High resolution entropy consistent schemes for hyperbolic conservation laws [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2014, 31(5): 539-551.
- [9] 刘友琼,封建湖,梁楠. 求解浅水波方程的熵相容格式[J]. *应用数学和力学*, 2013, 34(12): 1247-1257.
LIU Youqiong, FENG Jianhu, LIANG Nan. An entropy-consistent flux scheme for shallow water equations [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, 34(12): 1247-1257.
- [10] 程晓晗,聂玉峰,蔡力.基于 WENO 重构的熵稳定格式求解浅水方程[J]. *计算物理*, 2015, 32(5): 523-528.
CHENG Xiaohan, NIE Yufeng, CAI Li. WENO based entropy stable scheme for shallow water equations [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2015, 32(5): 523-528.
- [11] 程晓晗,封建湖,聂玉峰.求解双曲守恒律方程的 WENO 型熵相容格式[J]. *爆炸与冲击*, 2014, 34(4): 501-507.
CHENG Xiaohan, FENG Jianhu, NIE Yufeng. WENO type entropy consistent scheme for hyperbolic conservation laws [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2014, 34(4): 501-507.
- [12] 郑素佩,封建湖,刘彩侠.高分辨率熵相容算法在二维溃坝问题中的应用[J]. *水动力学研究与进展 A 辑*, 2013, 28(5): 545-551.
ZHENG Supei, FENG Jianhu, LIU Caixia. High-resolution entropy consistent algorithm for the two-dimensional dam-break flows [J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2013, 28(5): 545-551.
- [13] 吕梦迪,郑素佩,陈芳. 五阶高分辨率熵稳定算法[J]. *信阳师范学院学报(自然科学版)*, 2018, 31(2): 191-196.
LYU Mengdi, ZHENG Supei, CHEN Fang. Fifth-order high-resolution entropy stable algorithm [J]. *Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition)*, 2018, 31(2): 191-196.
- [14] FJORDHOLM U, MISHRA S, TADMOR E. Energy preserving and energy stable schemes for the shallow water equations [C]//CUCKER F, PINKUS A, TODD M. *Proc FoCM held in Hong Kong 2008, London Math Soc Lecture Notes Ser*, 2009, 363:93-139.
- [15] FJORDHOLM U. Structure preserving finite volume methods for the shallow water equations[D]. Oslo: University of Oslo, 2009.
- [16] DUBEY R K, BISWAS B. Suitable diffusion for constructing non-oscillatory entropy stable schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, 372: 640-666.

责任编辑:郭红建