信阳师范学院学报(自然科学版)
第31卷 第1期 2018年1月
Journal of Xinyang Normal University
Natural Science Edition Vol. 31 No. 1 Jan. 2018

DOI:10.3969/j.issn.1003-0972.2018.01.005

伪双曲方程一个非协调混合元方法超收敛分析

马 戈*, 胡双年

(南阳理工学院 数学与统计学院, 河南 南阳 473004)

摘 要:基于非协调 EQ_1^{rot} 元和零阶 R-T 元针对伪双曲方程,建立了一个自然满足 B-B 条件的非协调低阶混合元逼近格式.借助单元插值算子的特殊性质、导数转移技巧和插值后处理技术,在半离散格式下给出了原始变量在 H^1-模和中间变量在 L^2-模意义下的 $O(h^2)$ 阶超逼近性与整体超收敛结果.同时,对于一个二阶全离散格式得到了原始变量 H^1-模的 $O(h^2+\tau^2)$ 超逼近性和中间变量 L^2-模的 $O(h+\tau^2)$ 最优误差估计.

关键词:伪双曲方程; 非协调混合有限元; 半离散和全离散; 超逼近和超收敛

中图分类号:O242.21 **文献标志码**:A **文章编号**:1003-0972(2018)01-0021-06

Superconvergence Analysis of a Nonconforming Mixed Finite Element Method for Pseudo-hyperbolic Equation

MA Ge*, HU Shuangnian

(School of Mathematics and Statistics, Nanyang Institute of Technology, Nanyang 473004, China)

Abstract: With help of the nonconforming EQ_1^{rot} element and zero order Raviart-Thomas element, a new low order nonconforming mixed finite elements approximation scheme was proposed for the pseudo-hyperbolic equation, which can satisfy Brezzi-Babuska condition automatically. Based on the special characters of the interpolation operators of the elements, derivative transferring technique with respect to the time and interpolation post-processing technique, the superclose properties and superconvergence results with order $O(h^2)$ for the primitive solution in H^1 -norm and the intermediate variable in L^2 -norm were deduced separately for semi-discrete scheme. At the same time, the superclose properties with order $O(h^2+\tau^2)$ and optimal order error estimates with order $O(h+\tau^2)$ of original variable in H^1 -norm and intermediate variable in L^2 -norm were separately derived for a second order fully- discrete scheme.

Key words: pseudo-hyperbolic equation; nonconforming mixed finite element; semi-discrete and fully-discrete schemes; superclose properties and superconvergence

0 引言

考虑如下伪双曲方程[1]:

$$\begin{cases} u_{tt} - \nabla(a(X)\nabla u_t + a(X)\nabla u) + \\ \qquad b(X)u_t = f(X,t), X \in \Omega, t \in (0,T], \\ u(X,t) = 0, X \in \partial\Omega, t \in (0,T], \\ u(X,0) = u_0(X), u_t(X,0) = u_1(X), X \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $X=(x,y)$,Ω 为边界并行于坐标轴的有界矩形区域,其边界是 $\partial\Omega$,$f \in L^2(\Omega)$、$u_0(X)$、$u_1(X)$ 为已知光滑函数,$a(X)$ 和 $b(X)$ 为已知光滑函数,且满足 $a_0 \leqslant a(X) \leqslant a_1$,$b_0 \leqslant b(X) \leqslant b_1$,这里 a_0,a_1,b_0,b_1 是正常数.

伪双曲方程通常用于描述非线性连续动力系统、动物神经轴突中的生物传导过程、黏弹性理论等,其理论分析和数值计算一直以来受到关注.例如文献[2]讨论了其解的存在唯一性;文献[3]用类 Wilson 元构造了其非协调元逼近格式,给出了超收敛及外推结果;文献[4]用最小二乘混合元方法得到了解的 L^2-模最优误差估计;文献[5]用分裂正定方法得到了解的收敛性估计、超逼近和外推结果;文献[6]和[7]分别利用双线性元和零阶 R-T 元以及 EQ_1^{rot} 元和 Nédélec's 元,构造了它的协调和非协调 H^1-Galerkin 逼近格式,得到了解的超逼近和收敛性结果.

本文利用非协调 EQ_1^{rot} 元和零阶 R-T 元,针对方程(1)建立了一个自然满足 B-B 条件的非协调低阶混合元逼近格式.在不使用传统投影算子的前提下,结合文献[8-12]的分析思想,充分利用单元插值算子的特殊性质、导数转移技巧、平均值技巧及插值后处理技术等,对半离散格式得到了

收稿日期:2017-09-06;修订日期:2017-12-09; *.通信联系人,E-mail: mageny@ 126.com

基金项目:国家自然科学基金项目(11671369);河南省高等学校重点科研项目(17A110010)

作者简介:马戈(1964—),男,河南邓州人,教授,主要从事有限元方法与应用研究.

原始变量的 H^1- 模和中间变量 L^2- 模意义下的 $O(h^2)$ 阶超逼近性与整体超收敛结果.同时,构造了一个二阶全离散格式并导出了原始变量 H^1- 模的 $O(h^2+\tau^2)$ 超逼近性和中间变量 L^2- 模的 $O(h+\tau^2)$ 最优误差估计.

1　单元构造及问题逼近

设 J_h 为 Ω 的正则单元剖分族. $\forall K\in J_h$,K 的中心为 (x_k,y_k),顶点为 $A_1(x_k-h_{x,k},y_k-h_{y,k})$,$A_2(x_k+h_{x,k},y_k-h_{y,k})$,$A_3(x_k+h_{x,k},y_k+h_{y,k})$,$A_i(x_k-h_{x,k},y_k+h_{y,k})$,边长 $l_i=\overline{A_iA_{i+1}}$,$i=1,2,3,4(\mathrm{mod}\ 4)$,并记 $h=\max\limits_{K\in J_h}\{h_K\}$,其中 h_K 是 K 的最大直径.定义混合元有限空间为

$$V_h=\{v_h;v_h|_K\in\mathrm{span}\{1,x,y,x^2,y^2\},\int_F[v_h]\mathrm{d}s=0,F\subset\partial K,\forall K\in J_h\},$$

$$\vec{M}_h=\{\vec{w}_h=(w_h^1,w_h^2);\vec{w}_h|_K\in Q_{1,0}(K)\times Q_{0,1}(K),\forall K\in J_h\},$$

其中:$Q_{m,n}(K)=\mathrm{span}\{x^iy^j,0\leqslant i\leqslant m,0\leqslant j\leqslant n\}$,$F$ 是单元 K 的边,$[v_h]$ 表示 v 跨过边界 F 的跃度,当 $F\subset\partial\Omega$ 时,$[v]=v$.

对 $u\in H^1(\Omega)$,$\vec{w}\in(H^1(\Omega))^2$,设 $I_h:H^1(\Omega)\to V_h$ 和 $\Pi_h:(H^1(\Omega))^2\to M_h$ 分别是由 V_h 和 M_h 诱导出的插值算子,满足:$I_h|_K=I_h$,$\Pi_h|_K=\Pi_h$,

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{l_i}(u-I_hu)\mathrm{d}s=0,i=1,2,3,4,\\ \displaystyle\int_K(u-I_hu)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\end{cases}$$

$$\int_{l_i}(\vec{w}-\Pi_h\vec{w})\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=0,i=1,2,3,4,$$

其中 $\vec{n}$ 是 l_i,$i=1,2,3,4$ 的单位外法向量.

由空间 V_h 和 $\vec{M}_h$ 的构造,显然 $\nabla V_h\subset\vec{M}_h$,且成立下面结论:

引理 1[13-15]　对于 $u\in H^1(\Omega)$,$\vec{p}\in(H^2(\Omega))^2$,任给 $v_h\in V_h$,$\vec{w}_h\in\vec{M}_h$,有

$$(\nabla(u-I_h^1u),\nabla v_h)_h=0,\tag{2}$$

$$(\nabla(u-I_h^1u),\vec{w}_h)_h=0,\tag{3}$$

$$(\vec{p}-\Pi_h\vec{p},\vec{w}_h)=O(h^2)|\vec{p}|_2\|\vec{w}_h\|_0,\tag{4}$$

$$\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}\cdot\vec{n}v_h\mathrm{d}s=O(h^2)|\vec{p}|_2\|v_h\|_h,\tag{5}$$

其中

$$(u,v)_h=\sum_K\int_K uv\mathrm{d}x,\ \|\cdot\|_h=(\sum_K|\cdot|_{1,K}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

显然 $\|\cdot\|_h$ 是 V_h 上的模.

引入变量 $\vec{p}=a(X)\nabla u_t+a(X)\nabla u$,则方程(1)等价于:$\forall t\in(0,T]$,

$$\begin{cases}a(X)\nabla u_t+a(X)\nabla u=\vec{p},X\in\Omega,\\ u_{tt}-\nabla\vec{p}+b(X)u_t=f(X,t),X\in\Omega,\\ u(X,t)=0,X\in\partial\Omega,\\ u(X,0)=u_0(X),u_t(X,0)=u_1(X),X\in\Omega,\end{cases}\tag{6}$$

其对应变分问题为:$\forall\vec{w}\in(L^2(\Omega))^2$,$\forall v\in H_0^1(\Omega)$,求$\{u,\vec{p}\}:[0,T]\to H_0^1(\Omega)\times(L^2(\Omega))^2$,使得

$$\begin{cases}(a(X)\nabla u_t,\vec{w})+(a(X)\nabla u,\vec{w})=(\vec{p},\vec{w}),\\ (u_{tt},v)-(\vec{p},\nabla v)+(b(X)u_t,v)=(f(X,t),v),\\ u(X,0)=u_0(X),u_t(X,0)=u_1(X),X\in\Omega.\end{cases}\tag{7}$$

那么相应于方程(7)的半离散逼近格式为:求$\{u_h,\vec{p}_h\}:[0,T]\to V_h\times\vec{M}_h$,使 $\forall v_h\in V_h$,$\vec{w}_h\in\vec{M}_h$,

$$\begin{cases}(a(X)\nabla u_{ht},\vec{w}_h)_h+(a(X)\nabla u_h,\vec{w}_h)_h=(\vec{p}_h,\vec{w}_h)_h,\\ (u_{htt},v_h)-(\vec{p}_h,\nabla v_h)_h+(b(X)u_{ht},v_h)=(f(X,t),v_h),\\ u_h(0)=I_h^1u_0(X),u_{ht}(0)=I_h^1u_1(X),X\in\Omega.\end{cases}\tag{8}$$

由于 $H_0^1(\Omega)$ 和 $(L^2(\Omega))^2$,V_h 和 $\vec{M}_h$ 分别满足连续和离散的B-B条件,由微分方程理论可知,方程(7)和(8)均存在唯一解.

2　半离散格式下的超逼近分析

定理 1　设$\{u,\vec{p}\}$和$\{u_h,\vec{p}_h\}$分别是方程(7)和(8)的解,且 $u,u_t,u_{tt}\in H^2(\Omega)$;$\vec{p},\vec{p}_t\in(H^2(\Omega))^2$,成立如下超逼近结果

$$\|I_hu-u_h\|_h\leqslant Ch^2(\int_0^t(\|u\|_2^2+\|u_t\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2+\|\vec{p}\|_2^2)\mathrm{d}\tau)^{\frac{1}{2}},\tag{9}$$

$$\|\Pi_h\vec{p}-\vec{p}_h\|_0\leqslant Ch^2(\|u\|_2+\|u_t\|_2+\|\vec{p}\|_2+F),\tag{10}$$

其中

$$F=(\int_0^t(\|u\|_2^2+\|u_t\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2+\|\vec{p}\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2)\mathrm{d}\tau)^{\frac{1}{2}}.$$

证明　记

$$u-u_h=(u-I_hu)+(I_hu-u_h)=\eta+\xi,$$

$$\vec{p}-\vec{p}_h=(\vec{p}-\Pi_h\vec{p})+(\Pi_h\vec{p}-\vec{p}_h)=\vec{\rho}+\vec{\theta}.$$

由方程(7)和(8),$\forall\vec{w}_h\in\vec{M}_h$,$\forall v_h\in V_h$,成立误差方程:

$$\begin{cases}(\vec{\rho},\vec{w}_h)+(\vec{\theta},\vec{w}_h)=(a(X)\nabla\eta_t+a(X)\nabla\xi_t,\vec{w}_h)_h+\\ \quad(a(X)\nabla\eta+a(X)\nabla\xi,\vec{w}_h)_h,\\ (\xi_{tt},v_h)+(b(X)\xi_t,v_h)+(\vec{\theta},\nabla v_h)_h=\\ \quad-(\eta_{tt},v_h)-(b(X)\eta_t,v_h)-(\vec{\rho},\nabla v_h)_h+\\ \quad\displaystyle\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}v_h\cdot\vec{n}\mathrm{d}s.\end{cases}\tag{11}$$

在方程(11)第二式中取 $v_h=\xi_t$,第一式中取 $\vec{w}_h=\nabla\xi_t$,两式相减得

$$\begin{aligned}&(\xi_{tt},\xi_t)+(a(X)\nabla\xi,\nabla\xi_t)_h+\\&(a(X)\nabla\xi_t,\nabla\xi_t)_h+(b(X)\xi_t,\xi_t)=\\&-(\eta_{tt},\xi_t)-(a(X)\nabla\eta,\nabla\xi_t)_h-\\&(a(X)\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)_h-(b(X)\eta_t,\xi_t)+\end{aligned}$$

$$\sum_K \int_{\partial K} \vec{p}\xi_t \cdot \vec{n}\mathrm{d}s =: \sum_{i=1}^{5} B_i. \tag{12}$$

注意到式(12)的左端项

$$(\xi_{tt},\xi_t) + (a(X)\nabla\xi,\nabla\xi_t)_h + (a(X)\nabla\xi_t,\nabla\xi_t)_h + (b(X)\xi_t,\xi_t) \geqslant \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\xi_t\|_0^2 + \|(a(X))^{\frac{1}{2}}\nabla\xi\|_0^2) + a_0\|\xi_t\|_h^2 + b_0\|\xi_t\|_0^2. \tag{13}$$

下面对式(12)的右端各项进行估计.应用性质1,平均值技巧及 ε-Young 不等式有

$$B_1 + B_5 \leqslant Ch^2\|u_{tt}\|_2\|\xi_t\|_0 + Ch^2\|\vec{p}\|_2\|\xi_t\|_h \leqslant Ch^4(\|u_{tt}\|_2^2 + \|\vec{p}\|_2) + \varepsilon\|\xi_t\|_0^2 + \varepsilon\|\xi_t\|_h^2,$$

$$B_2 + B_3 \leqslant ((a(X) - \overline{a(X)})\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)_h + ((a(X) - \overline{a(X)})\nabla\eta,\nabla\xi_t)_h \leqslant Ch^4(\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2) + \varepsilon\|\xi_t\|_h^2,$$

$$B_4 \leqslant ((b(X) - \overline{b(X)})\eta_t,\xi_t) + (\overline{b(X)\eta_t},\xi_t) \leqslant Ch^4\|u_t\|_2^2 + \varepsilon\|\xi_t\|_0^2,$$

将上述对 $B_i(i = 1,2,\cdots,5)$ 的估计及式(13)代入式(12)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\xi_t\|_0^2 + \|(a(X))^{\frac{1}{2}}\nabla\xi\|_0^2) + a_0\|\xi_t\|_h^2 + b_0\|\xi_t\|_0^2 \leqslant Ch^4(\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 + \|\vec{p}\|_2^2) + \varepsilon\|\xi_t\|_h^2 + \varepsilon\|\xi_t\|_0^2. \tag{14}$$

对式(14)两端从0到 t 积分,注意到 $\xi_t(X,0) = \nabla\xi(X,0) = 0$,并取 ε 充分小得

$$\|\xi_t\|_0^2 + \|\xi\|_h^2 \leqslant Ch^4\int_0^t(\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 + \|\vec{p}\|_2^2)\mathrm{d}\tau, \tag{15}$$

即式(9)得证.

为了估计 $\|\theta\|_0^2$,下面先估计 $\|\xi_t\|_h^2$.

在误差方程(11)第二式中取 $v_h = \xi_{tt}$,第一式中取 $\vec{w}_h = \nabla\xi_{tt}$,两式相减得

$$(\xi_{tt},\xi_{tt}) + (a(X)\nabla\xi_t,\nabla\xi_{tt})_h + (b(X)\xi_t,\xi_{tt}) = -(\eta_{tt},\xi_{tt}) - (a(X)\nabla\eta,\nabla\xi_{tt})_h - (a(X)\nabla\eta_t,\nabla\xi_{tt})_h - (b(X)\eta_t,\xi_{tt}) - (a(X)\nabla\xi,\nabla\xi_{tt})_h + \sum_K\int_{\partial K}\vec{p}\xi_{tt}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s =: \sum_{i=1}^{6} D_i. \tag{16}$$

下面估计式(16)右端各项.利用导数转移技巧、平均值技巧和引理1及 ε-Young 不等式有

$$D_1 + D_4 \leqslant C(\|\eta_{tt}\|_0 + \|\eta_t\|_0)\|\xi_{tt}\|_0 \leqslant Ch^4(\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_t\|_2^2) + \varepsilon\|\xi_{tt}\|_0^2,$$

$$D_2 = (a(X)\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)_h - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(X)\nabla\eta,\nabla\xi_t)_h = ((a(X) - \overline{a(X)})\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)_h - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(X)\nabla\eta,\nabla\xi_t)_h \leqslant Ch^4\|u_t\|_2^2 + C\|\xi_t\|_h^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(X)\nabla\eta,\nabla\xi_t)_h.$$

类似有

$$D_3 = (a(X)\nabla\eta_{tt},\nabla\xi_t)_h - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(X)\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)_h \leqslant Ch^4\|u_{tt}\|_2^2 + C\|\xi_t\|_h^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(X)\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)_h,$$

$$D_5 = (a(X)\nabla\xi_t,\nabla\xi_t)_h - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(X)\nabla\xi,\nabla\xi_t)_h \leqslant a_1\|\xi_t\|_h^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(X)\nabla\xi,\nabla\xi_t)_h,$$

$$D_6 = \sum_K\int_{\partial K}\vec{p}_t\xi_t\cdot\vec{n}\mathrm{d}s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}\xi_t\cdot\vec{n}\mathrm{d}s \leqslant Ch^4\|\vec{p}_t\|_2^2 + C\|\xi_t\|_h^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}\xi_t\cdot\vec{n}\mathrm{d}s.$$

将上述 $D_i(i = 1,2,\cdots,6)$ 的估计代入式(16)有

$$\|\xi_{tt}\|_0^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|(a(X))^{\frac{1}{2}}\nabla\xi_t\|_0^2 + \|(b(X)^{\frac{1}{2}}\xi_t\|_0^2) \leqslant Ch^4(\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 + \|\vec{p}_t\|_2^2) + \varepsilon\|\xi_{tt}\|_0^2 + C\|\xi_t\|_h^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(X)\nabla\xi,\nabla\xi_t)_h - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(X)\nabla\eta,\nabla\xi_t)_h - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(X)\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)_h + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}\xi_t\cdot\vec{n}\mathrm{d}s. \tag{17}$$

取 ε 充分小,对式(17)两端从0到 t 积分,并注意到 $\xi_t(X,0) = 0,\nabla\xi_t(X,0) = 0$,可得

$$\|(a(X))^{\frac{1}{2}}\nabla\xi_t\|_0^2 + \|(b(X)^{\frac{1}{2}}\xi_t\|_0^2 \leqslant Ch^4\int_0^t(\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 + \|\vec{p}_t\|_2^2)\mathrm{d}\tau + C\int_0^t\|\xi_t\|_h^2\mathrm{d}\tau - (a(X)\nabla\xi,\nabla\xi_t)_h - (a(X)\nabla\eta,\nabla\xi_t)_h - (a(X)\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)_h + \sum_K\int_{\partial K}\vec{p}\xi_t\cdot\vec{n}\mathrm{d}s \leqslant Ch^4\int_0^t(\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 + \|\vec{p}_t\|_2^2)\mathrm{d}\tau + C\int_0^t\|\xi_t\|_h^2\mathrm{d}\tau + C\|\xi\|_h^2 + \varepsilon\|\xi_t\|_h^2 + Ch^4(\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 + \|\vec{p}\|_2^2). \tag{18}$$

注意到 $a(X) \geqslant a_0 > 0,b(X) \geqslant b_0 > 0$,由式(18)及 Gronwall 引理有

$$\|\xi_t\|_h^2 + \|\xi_t\|_0^2 \leqslant Ch^4(\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 + \|\vec{p}\|_2^2) + Ch^4F^2, \tag{19}$$

得到了 $\|\xi_t\|_h^2$ 的估计.

在误差方程(11)的第一式中,取 $\vec{w}_h = \vec{\theta}$,利用引理1, ε-Young 不等式,式(15)和(19)对 $\|\xi\|_h^2$ 和 $\|\xi_t\|_h^2$ 的估计结果得

$$\|\vec{\theta}\|_0^2 = -(\vec{\rho},\vec{\theta}) + (a(X)(\nabla\eta_t + \nabla\eta),\vec{\theta})_h +$$

$$(a(X)(\nabla\xi_t+\nabla\xi),\vec{\theta})_h\leqslant$$
$$Ch^2\|\vec{p}\|_2\|\vec{\theta}\|_0+C(\|\xi_t\|_h+\|\xi\|_h)\|\vec{\theta}\|_0+$$
$$((a(X)-\overline{a(X)})(\nabla\eta_t+\nabla\eta),\vec{\theta})_h\leqslant$$
$$Ch^4(\|u\|_2^2+\|u_t\|_2^2+\|\vec{p}\|_2^2+F^2)+\varepsilon\|\vec{\theta}\|_0^2. \tag{20}$$

取 ε 充分小即得(10)式,定理得证.证毕.

类似文献[10],把 J_h 中 4 个小单元 K_1、K_2、K_3、K_4 合并成一个大单元 $\tilde{K}$,并在单元 $\tilde{K}$ 上构造插值算子 I_{2h} 和 Π_{2h},易得如下超收敛结果:

定理 2　设 $\{u,\vec{p}\}$ 和 $\{u_h,\vec{p}_h\}$ 分别是方程(7)和(8)的解,且 $u\in H^3(\Omega)$, $u_t,u_{tt}\in H^2(\Omega)$, $\vec{p}\in(H^2(\Omega))^2$ 则成立下面的整体超收敛结果

$$\|u-I_{2h}u_h\|_h\leqslant Ch^2[\|u\|_2+\|\vec{p}_t\|_2+H], \tag{21}$$
$$\|\vec{p}-\Pi_{2h}\vec{p}_h\|_0\leqslant Ch^2[\|u\|_2+\|\vec{p}\|_2+\|\vec{p}_t\|_2+H], \tag{22}$$

其中 $H=\left(\int_0^t(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_2^2+\|\vec{p}\|_2^2)\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}$.

3　全离散格式下的超逼近分析

设 $0=t_0<t_1<\cdots<t_{N-1}<t_N=T$ 是 $[0,T]$ 上等步长剖分,$\tau=T/N$, $t_n=n\tau$, $n=0,1,\cdots,N$,任给光滑函数 φ,定义 $\varphi^n=\varphi(t_n)$,并记

$$\varphi^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\varphi^{n+1}+\varphi^n),\ \partial_t\varphi^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\tau}(\varphi^{n+1}-\varphi^n),$$
$$\varphi^{n,\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}(\varphi^{n+1}+2\varphi^n+\varphi^{n-1})=\frac{1}{2}(\varphi^{n+\frac{1}{2}}+\varphi^{n-\frac{1}{2}}),$$
$$\partial_t\varphi^n=\frac{1}{2}(\partial_t\varphi^{n+\frac{1}{2}}+\partial_t\varphi^{n-\frac{1}{2}}),$$
$$\partial_{tt}\varphi^n=\frac{1}{\tau}(\partial_t\varphi^{n+\frac{1}{2}}-\partial_t\varphi^{n-\frac{1}{2}}).$$

构造方程(7)的二阶全离散形式如下:求 $\{u^n,\vec{p}^n\}:[0,T]\to H_0^1(\Omega)\times(L^2(\Omega))^2$,对 $\forall X\in\Omega$, $v\in H_0^1(\Omega)$, $\vec{w}\in(L^2(\Omega))^2$,有

$$\begin{cases}(a(X)\nabla\partial_t u^n,\vec{w})+(a(X)\nabla u^{n,\frac{1}{4}},\vec{w})=\\ \qquad(\vec{p}^{n,\frac{1}{4}},\vec{w})+(a(X)R_1^n,\vec{w}),\\ (\partial_{tt}u^n,v)+(b(X)\partial_t u^n,v)-(\vec{p}^{n,\frac{1}{4}},\nabla v)=\\ \qquad(f^{n,\frac{1}{4}},v)+(R_2^n,v)+(b(X)R_1^n,v),\\ u(X,0)=u_0(X),u_t(X,0)=u_1(X),\end{cases} \tag{23}$$

其中

$$R_1^n=\partial_t u^n-u_t^{n,\frac{1}{4}}=O(\tau^2u_{ttt}),$$
$$R_2^n=\partial_{tt}u^n-u_{tt}^{n,\frac{1}{4}}=O(\tau^2u_{tttt}).$$

对应于方程(23)的有限元逼近格式为:求 $\{u_h^n,\vec{p}_h^n\}:[0,T]\to V_h\times\vec{M}_h$,使任给 $v\in H_0^1(\Omega)$, $\vec{w}\in(L^2(\Omega))^2$,有

$$\begin{cases}(a(X)\nabla\partial_t u_h^n,\vec{w})+(a(X)\nabla u_h^{n,\frac{1}{4}},\vec{w})=(\vec{p}_h^{n,\frac{1}{4}},\vec{w}),\\ (\partial_{tt}u_h^n,v)+(b(X)\partial_t u_h^n,v)-(\vec{p}_h^{n,\frac{1}{4}}\cdot\nabla v)=(f^{n,\frac{1}{4}},v),\\ u_h^0=I_hu_0(X),u_h^1=I_h(u_0(X)+u_1(X)\tau+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}(X,0)),\end{cases} \tag{24}$$

其中

$$u_{tt}(X,0)=-b(X)u_1(X)+\nabla(a(X)\nabla u_1(X)+a(X)\nabla u_0(X))+f(X,0).$$

定理 3　设 $\{u^n,\vec{p}^n\}$ 和 $\{u_h^n,\vec{p}_h^n\}$ 分别是式(23)和(24)的解,且 $u\in L^\infty(0,T,H^2(\Omega))$; $u_t,u_{tt}\in H^2(\Omega)$; $u_{ttt}\in L^\infty(0,T,H^1(\Omega))$; $u_{tttt}\in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$; $\vec{p}\in L^\infty(0,T,(H^2(\Omega))^2)$,则成立

$$\|I_hu^n-u_h^n\|_h\leqslant C(h^2F_1+\tau^2F_2), \tag{25}$$
$$\|\vec{p}^n-\vec{p}_h^n\|_0\leqslant C(hF_1+\tau^2F_2), \tag{26}$$

其中

$$F_1=\left(\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}+\|\vec{p}\|^2_{L^\infty(0,T;(H^2(\Omega))^2)}+\|u_t\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}+\|u_{tt}\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$F_2=\left(\|u_{ttt}\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}+\|u_{tttt}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明　记

$$u^n-u_h^n=(u^n-I_hu^n)+(I_hu^n-u_h^n)=\eta^n+\xi^n,$$
$$\vec{p}^n-\vec{p}_h^n=(\vec{p}^n-\Pi_h\vec{p}^n)+(\Pi_h\vec{p}^n-\vec{p}_h^n)=\vec{\rho}^n+\vec{\theta}^n.$$

由方程(23)和(24),$\forall\vec{w}_h\in\vec{M}_h$, $v_h\in V_h$,可得如下误差方程

$$\begin{cases}(\vec{\rho}^{n,\frac{1}{4}},\vec{w}_h)+(\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}},\vec{w}_h)=\\ \qquad(a(X)\nabla\partial_t\xi^n,\vec{w}_h)_h+(a(X)\nabla\partial_t\eta^n,\vec{w}_h)_h+\\ \qquad(a(X)\nabla\xi^{n,\frac{1}{4}},\vec{w}_h)_h+(a(X)\nabla\eta^{n,\frac{1}{4}},\vec{w}_h)_h-\\ \qquad(a(X)\nabla R_1^n,\vec{w}_h)_h,\\ (\partial_{tt}\xi^n,v_h)+(b(X)\partial_t\xi^n,v_h)+\\ \qquad(\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}},\nabla\vec{v}_h)_h+(\vec{\rho}^{n,\frac{1}{4}},\nabla\vec{v}_h)_h=\\ \qquad-(\partial_{tt}\eta^n,v_h)-(b(X)\partial_t\eta^n,v_h)+\\ \qquad\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}^{n,\frac{1}{4}}v_h\cdot\vec{n}\mathrm{d}s+(R_2^n,v_h)+(b(X)R_1^n,v_h).\end{cases} \tag{27}$$

在方程(27)第二式中取 $v_h\in\partial_t\xi^n$,第一式中取 $\vec{w}_h=\nabla\partial_t\xi^n$,两式相减得

$$(\partial_{tt}\xi^n,\partial_t\xi^n)+(b(X)\partial_t\xi^n,\partial_t\xi^n)+$$
$$(a(X)\nabla\xi^{n,\frac{1}{4}},\nabla\partial_t\xi^n)_h+(a(X)\nabla\xi_t{}^n,\nabla\partial_t\xi^n)_h=$$
$$-(\partial_{tt}\eta^n,\partial_t\xi^n)-(b(X)\partial_t\eta^n,\partial_t\xi^n)-$$
$$(a(X)\nabla\partial_t\eta^n,\nabla\partial_t\xi^n)_h-(a(X)\nabla\eta^{n,\frac{1}{4}},\nabla\partial_t\xi^n)_h+$$
$$(R_2^n,\partial_t\xi^n)+(b(X)R_1^n,\partial_t\xi^n)+(a(X)\nabla R_1^n,\partial_t\xi^n)+$$
$$\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}^{n,\frac{1}{4}}\partial_t\xi^n\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=:\sum_{i=1}^8E_i. \tag{28}$$

注意到,方程(28)的左端

$$(\partial_{tt}\xi^n,\partial_t\xi^n)+(b(X)\partial_t\xi^n,\partial_t\xi^n)+$$
$$(a(X)\nabla\xi^{n,\frac14},\nabla\partial_t\xi^n)_h+(a(X)\nabla\xi_t{}^n,\nabla\partial_t\xi^n)_h\geqslant$$
$$\frac{1}{2\tau}(\|\partial_t\xi^{n+\frac12}\|_0^2-\|\partial_t\xi^{n-\frac12}\|_0^2+$$
$$\|(a(X))\frac12\nabla\xi^{n+\frac12}\|_0^2-\|(a(X))\frac12\nabla\xi^{n-\frac12}\|_0^2)+$$
$$b_0\|\partial_t\xi^n\|_0^2+a_0\|\partial_t\xi^n\|_h^2.\tag{29}$$

下面对式(28)右端各项估计,注意有

$$\|\partial_{tt}\eta^n\|_0^2\leqslant C\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|\eta_{tt}\|_0^2\mathrm{d}t,$$
$$\|\partial_t\eta^n\|_0^2\leqslant C\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|\eta_t\|_0^2\mathrm{d}t,$$

则由引理1、Schwarz和ε-Young不等式

$$E_1+E_2\leqslant C(\|\partial_{tt}\eta^n\|_0^2+\|\partial_t\eta^n\|_0^2)+\varepsilon\|\partial_t\xi^n\|_0^2\leqslant$$
$$C\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}(\|\eta_{tt}\|_0^2+\|\eta_{tt}\|_0^2)\mathrm{d}t+\varepsilon\|\partial_t\xi^n\|_0^2\leqslant$$
$$Ch^4\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_2^2)\mathrm{d}t+\varepsilon\|\partial_t\xi^n\|_0^2,$$
$$E_3=((a(X)-\overline{a(X)})\nabla\partial_t\eta^n,\nabla\partial_t\xi^n)\leqslant$$
$$Ch^4\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|u_t\|_2^2\mathrm{d}t+\varepsilon\|\partial_t\xi^n\|_h^2,$$
$$E_4=((a(X)-\overline{a(X)})\nabla\eta^{n,\frac14},\nabla\partial_t\xi^n)\leqslant$$
$$Ch^4\|u^{n,\frac14}\|_2^2+\varepsilon\|\partial_t\xi^n\|_h^2,$$
$$E_5+E_6+E_7\leqslant C(\|R_2^n\|_0^2+\|R_1^n\|_0^2+\|\nabla R_1^n\|_0^2)+$$
$$\varepsilon\|\partial_t\xi^n\|_0^2+\varepsilon\|\partial_t\xi^n\|_h^2\leqslant$$
$$C\tau^4(\|u_{ttt}\|_1^2+\|u_{tttt}\|_0^2)+\varepsilon\|\partial_t\xi^n\|_0^2+$$
$$\varepsilon\|\partial_t\xi^n\|_h^2,$$
$$E_8\leqslant Ch^2\|\vec{p}^{n,\frac14}\|_2\|\partial_t\xi^n\|_h\leqslant$$
$$Ch^4\|\vec{p}^{n,\frac14}\|_2^2+\varepsilon\|\partial_t\xi^n\|_h^2.$$

将上述$E_i(i=1,2,\cdots,6)$的估计及式(29),代入式(28)并取ε比较小有

$$\frac{1}{2\tau}(\|\partial_t\xi^{n+\frac12}\|_0^2-\|\partial_t\xi^{n-\frac12}\|_0^2+$$
$$\|(a(X))^{\frac12}\nabla\xi^{n+\frac12}\|_0^2-$$
$$\|(a(X))^{\frac12}\nabla\xi^{n-\frac12}\|_0^2)\leqslant$$
$$Ch^4(\|u^{n,\frac14}\|_2^2+\|\vec{p}^{n,\frac14}\|_2^2)+$$
$$C\tau^4(\|u_{ttt}\|_1^2+\|u_{tttt}\|_0^2)+$$
$$Ch^4\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_2^2)\mathrm{d}t\leqslant$$
$$Ch^4(\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}^2+\|\vec{p}\|_{L^\infty(0,T;(H^2(\Omega))^2)}^2)+$$
$$C\tau^4(\|u_{ttt}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2+\|u_{tttt}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2)+$$
$$Ch^4\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_2^2)\mathrm{d}t.\tag{30}$$

对式(30)两端同乘以2τ,并对n从1到$N-1$求和,注意$(N-1)\tau\leqslant T$,得

$$\|\partial_t\xi^{N-\frac12}\|_0^2+\|(a(X))^{\frac12}\nabla\xi^{N-\frac12}\|_0^2\leqslant$$
$$Ch^4(\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}^2+\|\vec{p}\|_{L^\infty(0,T;(H^2(\Omega))^2)}^2)+$$
$$Ch^4\int_0^T(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_2^2)\mathrm{d}t+$$
$$C\tau^4(\|u_{ttt}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2+\|u_{ttt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2)+$$
$$\|\partial_t\xi^{\frac12}\|_0^2+\|(a(X))^{\frac12}\nabla\xi^{\frac12}\|_0^2.\tag{31}$$

应用Taylor's展开易知

$$\xi^1=I_hu^1-u_h^1=O(\tau^3u_{ttt}),$$

注意到

$$\xi^0=I_hu^0-u_h^0=0,$$

故有

$$\|\partial_t\xi^{\frac12}\|_0^2+\|(a(X))\frac12\nabla\xi^{\frac12}\|_0^2\leqslant$$
$$C(\|\frac{\xi^1-\xi^0}{\tau}\|_0^2+\|\frac{\xi^1-\xi^0}{2}\|_0^2)\leqslant$$
$$C\tau^4\|u_{ttt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2.\tag{32}$$

将式(32)代入式(31),并注意$a_0\leqslant a(X)\leqslant b_0$,可得

$$\|\partial_t\xi^{n-\frac12}\|_0^2+\|\xi^{n-\frac12}\|_h^2\leqslant C(h^4F_1^2+\tau^4F_2^2).\tag{33}$$

由于

$$\|\xi^{n-\frac12}\|_h^2=\frac14\|\xi^n+\xi^{n-1}\|_h^2=$$
$$\frac14(\|\xi^n\|_h^2+\|\xi^{n-1}\|_h^2)+\frac12(\nabla\xi^n,\nabla\xi^{n-1}),\tag{34}$$
$$(\nabla\xi^n,\nabla\xi^{n-1})\leqslant\frac14\|\xi^n\|_h^2+\|\xi^{n-1}\|_h^2.\tag{35}$$

综合式(33)、(34)和式(35)可得

$$\|\partial_t\xi^{n-\frac12}\|_0^2+\|\xi^n\|_h^2\leqslant C(h^4F_1^2+\tau^4F_2^2).\tag{36}$$

即式(25)得证.

为了得到式(26),在方程(27)第一式中令$\vec{w}_h=\vec{\theta}^n$,易得

$$\|\vec{\theta}^n\|_0^2=(a(X)\nabla\xi^n,\vec{\theta}^n)_h+(a(X)\nabla\eta^n,\vec{\theta}^n)_h+$$
$$(a(X)\nabla\partial_t\xi^n,\vec{\theta}^n)_h+(a(X)\nabla\partial_t\eta^n,\vec{\theta}^n)_h-$$
$$(\vec{\rho}^n,\vec{\theta}^n)-(a(X)\nabla R_3^n,\vec{w}_h)_h=:\sum_{i=1}^6G_i,\tag{37}$$

其中,$R_3^n=\partial_tu^n-u_t^n=O(\tau^2u_{ttt})$.

由引理1、Schwarz和ε-Young不等式,并应用式(36)的结论有

$$G_1\leqslant C\|\xi^n\|_h^2+\varepsilon\|\vec{\theta}\|_h^2\leqslant$$
$$C(h^4F_1^2+\tau^4F_2^2)+\varepsilon\|\vec{\theta}\|_0^2,$$
$$G_2\leqslant((a(X)-\overline{a(X)})\nabla\eta^n,\vec{\theta}^n)_h\leqslant$$
$$Ch^4\|u\|_0^2+\varepsilon\|\vec{\theta}\|_0^2.$$

当网格比$\tau=O(h)$,利用逆估计有

$$G_3\leqslant C\|\nabla\partial_t\xi^n\|_0^2+\varepsilon\|\vec{\theta}\|_0^2\leqslant$$
$$Ch^{-2}(\|\partial_t\xi^{n+\frac12}\|_0^2+\|\partial_t\xi^{n-\frac12}\|_0^2)+\varepsilon\|\vec{\theta}\|_0^2\leqslant$$
$$C(h^2F_1^2+\tau^4F_2^2)+\varepsilon\|\vec{\theta}\|_0^2,$$
$$G_4=((a(X)-\overline{a(X)})\nabla\partial_t\eta^n,\vec{\theta}^n)_h\leqslant$$

$$Ch^2\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|\nabla\eta_t\|_0^2\mathrm{d}t+\varepsilon\|\theta^n\|_0^2\leqslant$$
$$Ch^4 u_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2+\varepsilon\|\theta^n\|_0^2,$$
$$G_5=-(\vec{\rho}^{\,n},\vec{\theta}^{\,n})\leqslant$$
$$Ch^4\|\vec{p}\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2)}^2+\varepsilon\|\vec{\theta}^{\,n}\|_0^2.$$
$$G_6=(\nabla R_3^n,\vec{\theta}^{\,n})_h\leqslant C\|\nabla R_3^n\|_0\|\theta^n\|_0\leqslant$$
$$C\tau^4\|u_{ttt}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}+\varepsilon\|\theta^n\|_0^2.$$

将上述 $G_i(i=1,2,\cdots,6)$ 代入式(37),并取 ε 充分小,有

$$\|\vec{\theta}^{\,n}\|_0^2\leqslant C(h^2F_1^2+\tau^4F_2^2). \tag{38}$$

再利用三角不等式可得式(26).证毕.

4　结语

对于单元空间对,如双线性元和Nédélec's元构成的协调元空间、正方形网格下的 Q_1^{rot} 元和零阶 R-T 元等,结论仍然成立.另外从证明过程知,若阻尼项 $a(X)\ \nabla u_t$ 中的 $a(X)$ 为常数,中间变量全离散格式的超逼近 $O(h^2+\tau^2)$ 显然成立,如何就本文也得到这一结果,有待我们进一步研究.本文的方法及所得的高精度结果对于伪双曲方程来说,就我们所知是以往文献尚未报道的.

参考文献:

[1] NAGUMO J, ARIMOTO S, YOSHIZAWA S. An active pulse transmission line simulating nerve axon[J]. Proc IRB, 1962, 50: 91-102.

[2] WAN W M, LIU Y C.Long time behaviors of solutions for initial boundary value problem of pseudo-hyperbolic equations[J].Acta Math Appl Sin, 1999, 22: 311-355.

[3] 史艳华,石东洋. 伪双曲方程类 Wilson 非协调元逼近[J].山东大学学报(理学版),2013,48(4):77-84.
SHI Yanhua, SHI Dongyang. The quasi-Wilson nonconforming finite element approximation to pseudo -hyperbolic equations[J]. Journal of Shandong University (Natural Science Edition), 2013, 48(4): 77-84.

[4] GUO H, RUI H X. Least-squares Galerkin procedures for pseudo-hyperbolic equations[J]. Appl Math Comp, 2007, 189(1): 425-439.

[5] SHI D Y, TANG Q. Super-convergence analysis of splitting positive definite nonconforming mixed finite element method for pseudo-hyperbolic equations[J]. Acta Math Appl Sin, 2013, 29: 843-854.

[6] 石东洋,史艳华. 半线性伪双曲方程最低阶的 H^1 -Galerkin 混合元方法[J]. 系统科学与数学,2015,35(5):514-526.
SHI Dongyang, SHI Yanhua. The lowest order H^1-Galerkin mixed finite element method for semi-linear pseudo- hyperbollc equation[J]. J Sys Sci & Math Scis,2015, 35(5): 514-526 .

[7] SHI D Y,ZHANG Y D.An H^1- Galerkin nonconforming mixed finite element method for the pseudo-hyperbolic equations[J]. Math Appl, 2011, 24:448-455.

[8] 石东洋,李明浩. 二阶椭圆问题一种新格式的高精度分析[J].应用数学学报,2014,37(1):45-58.
SHI Dongyang, LI Mibghao. High accuracy analysis of new schemes or second order elliptic problem for recurrent event data[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2014, 37(1): 45-58.

[9] 石玉,陈宝凤,李威,等. 非线性抛物方程的一个新混合元格式的超收敛分析[J].信阳师范学院学报(自然科学版),2014,27(3):328-331.
SHI Yu, CHENG Baofeng, LI Wei, et al. Superconvergence analysis of a new mixed finite element scheme for nonlinear parabolic equations [J]. Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition), 2014, 27(3): 328-331.

[10] 石东洋,张亚东.抛物型方程一个新的非协调混合元超收敛分析与外推[J].计算数学,2013,35(4):337-352.
SHI Dongyang, ZHANG Yadong. Superconvergence and extrapolation analysis of a new nonconforming mixed finite element approximation for parabolic equation[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2013, 35(4): 337-352.

[11] 刘倩,石东洋. 双相滞热传导方程的一个非协调混合有限元方法[J].河南师范大学学报(自然科学版),2016,44(2):15-21.
LIU Qian, SHI Dongyang. A nonconforming mixed finite element method for dual phase lagging heat conduction equations[J]. Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition), 2016, 44(2): 15-21.

[12] 张厚超,毛凤梅,白秀琴. 广义神经传播方程新的非协调混合元方法的超逼近分析[J].四川师范大学学报(自然科学版),2017,40(4):464-472.
ZHANG Hongchao, MAO Fengmei, BAI Xiuqin. Superclose estimates analysis of a new mixed finite elements method for generalized nerve conduction equation[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science Edition), 2017, 40(4): 464-472.

[13] 林群,严宁宁. 高效有限元构造与分析[M]. 保定:河北大学出版社,1996.
LIN Qun, YAN Ningning. Construction and analysis of high efficiency finite element[M]. Baoding: Hebei University Press, 1996.

[14] SHI D Y,MAO S P,CHEN S C. An anisotropic nonconforming finite element with some super-convergence results[J]. J Comput Math, 2005, 23(3): 261-274.

[15] LIN Q,TOBISKA L,ZHOU Aihui. Super_convergence and extrapolation of nonconforming low order finite elements applied to the Poisson equation[J]. IMA J Numer Anal, 2005, 25(1): 160-181.

责任编辑:郭红建