

DOI: 10.3969/j.issn.1003-0972.2017.03.003

平面多体机械系统的随机稳定性及 Hopf 分岔分析

白宝丽^a, 张建刚^{a*}, 杜文举^b, 卢家荣^a

(兰州交通大学 a. 数理学院; b. 交通运输学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 首先建立平面多体机械系统的随机非线性动力学模型, 得到 Itô 随机微分方程, 求解了系统响应扩散过程的转移概率密度函数相应的 FPK 方程. 然后运用拟不可积 Hamilton 理论对平面多体机械系统进行 Hopf 分岔分析, 利用 Lyapunov 指数和奇异边界理论对该系统的局部和全局稳定性分别进行讨论. 最后通过模拟平稳概率密度函数和联合概率密度函数的图像验证了理论结果.

关键词: 平面多体机械系统; 拟不可积 Hamilton 理论; 随机平均法; 随机稳定性; 随机 Hopf 分岔

中图分类号: TP271 **文献标志码:** A **文章编号:** 1003-0972(2017)03-0354-04

Stochastic Stability and Hopf Bifurcation Behavior of Planar Multi-Body Mechanical System

BAI Baoli^a, ZHANG Jiangan^{a*}, DU Wenju^b, LU Jiarong^a

(a. School of Mathematics and Physics; b. School of Traffic and Transportation,

Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Firstly, the stochastic nonlinear dynamic model of the multi-body mechanical system was established, the Itô differentiation equation and the corresponding FPK equation of the response-transition probability density function with the diffusing process were obtained. Then, the Hopf bifurcation behavior of the planar multi-body mechanical system was studied by using the quasi-nonintegrable Hamilton system theory. The conditions of local and global stability of the system were discussed by largest Lyapunov exponent and boundary category. Finally, the functional image of stationary probability density and jointly stationary probability density were simulated to verify the theoretical results.

Key words: multi-body mechanical system; quasi-nonintegrable Hamilton system theory; stochastic stability; stochastic Hopf bifurcation

0 引言

平面多体机械系统的动力学行为比较复杂且涉及许多非线性问题, 近年来, 已有学者从理论和实验上对平面多体机械系统作了分析. 文献[1-3]对带有转动关节间隙影响的平面多体机械系统进行了动力学研究, 其分析过程存在诸多限制, 无法得到更理想的结果. 通常情况下平面多体机械系统的动态分析是在几乎理想的条件下进行的, 而实际上真正的机械系统会受到各种随机的和不可预测的扰动, 这些典型的随机激励会导致系统不稳定发生分岔行为, 但随机激励耗散系统对其规律的描述更接近实际情况. 目前, 应用 Hamilton 理论体系对随机激励扰动下的平面多体机械系统的动力学行为分析较少. 而随机稳定性和分岔现象在许多物理系统中被广泛应用, 物理系统中非线性随机动力

学与控制的研究可表示成随机激励下耗散的 Hamilton 系统, 而 Hamilton 方程通常由 Lagrange 方程经 Legendre 变换得到. 文献[4]提出了一种广义的 Hamilton 方法来研究动力系统在平衡点处的稳定性; 文献[5]运用 Hamilton 理论研究了在谐和与宽带随机激励下拟可积哈密顿系统的最优时滞控制; 文献[6]用拟不可积 Hamilton 系统随机平均法分析了一类随机的 SIR 流行病模型的动力学行为. 这些文献为非线性随机动力学的运动规律做了很大的贡献, 故研究该平面多体机械系统在随机激励扰动下的动力学特性是可行的.

文章首先由外激励引入随机项, 建立其随机非线性动力学模型, 并得到 Hamilton 函数. 然后, 利用拟不可积 Hamilton 理论得到 Itô 微分方程, 运用乘积遍历性定理计算出了

收稿日期: 2016-10-20; 修订日期: 2017-03-01; * .通信联系人, E-mail: zhangjg7715776@163.com

基金项目: 国家自然科学基金项目(61364001)

作者简介: 白宝丽(1989—), 女, 山西吕梁人, 硕士生; 张建刚(1978—), 男, 甘肃庆阳人, 副教授, 博士, 主要从事非线性动力系统研究.

Lyapunov 指数^[7].由于漂移系数 $m(H)$ 和扩散系数 $\sigma^2(H)$ 受随机参激的影响,经常会出现奇异边界.而扩散过程在边界上的性态很大程度上决定整个扩散过程的性质,所以利用 Itô 微分方程的边界类别对系统平凡解的全局稳定性做出判断,即分析漂移系数与扩散系数的指数及特征标值在边界领域的极限性态.根据奇异边界理论分析了边界类型,得出了该系统全局稳定需满足的条件,在不同的参数条件下分析了系统响应联合概率密度函数和平稳概率密度函数,研究了该系统的随机 Hopf 分岔行为,最后分析了分岔参数并展示其数值模拟图.

1 模型的建立

考虑到转子间隙摩擦和材料的不均匀以及外界随机因素的影响,平面多体机械系统^[3]会发生分岔行为.首先由外激励引入随机项,将这些因素用高斯白噪声 $\psi(t)$ 代替,其中 $\psi(t)$ 是零均值高斯白噪声矢量, $2S$ 为高斯白噪声强度,即满足:

$$E[\psi(t)] = 0, E[\psi(t)\psi(t+\tau)] = 2S\delta(\tau) \quad [8],$$

建立其单自由度微分方程如下:

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq = F_q\psi(t), \quad (1)$$

其中: M, C, K 为广义质量; q 为广义坐标; F_q 是关于 q 和 \dot{q} 的函数.令 $u = \dot{q}, v = q, C/M = m_0, K/M = n, F_q/M = F$, 则方程(1)可模型化为 Stratonovich 随机微分方程,加上 Wong-zakai 修正项转化为 Itô 随机微分方程,与原系统保守力和阻尼项分别进行合并,修正项可分为保守部分与耗散部分,其相应的 Hamilton 系统可化为:

$$\begin{cases} \dot{v} = u, \\ \dot{u} = -m_0u - nv + Fv\psi(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 v 和 u 分别是广义位移与广义动量,则系统(2)的 Hamilton 函数表示如下:

$$H(u, v) = \frac{1}{2}u^2 + \frac{n}{2}v^2. \quad (3)$$

因为与方程(2)相应的 Hamilton 系统是不可积的,则 Hamilton 函数是此不可积系统(2)中唯一的慢变过程.根据拟不可积 Hamilton 系统的定义和性质,方程(2)弱收敛于一维马尔可夫反应扩散过程^[9].基于随机平均法,可得方程(3)的 Itô 随机微分方程:

$$dH = m(H)dt + \sigma(H)dB(t), \quad (4)$$

其中 $m(H)$ 和 $\sigma(H)$ 分别是 Itô 随机微分方程的漂移系数和扩散系数,是通过方程(2)对时间做平均得到的.计算时 $m(H)$ 被看成常数 $B(t)$ 是标准 Weiner 过程,由拟不可积 Hamilton 随机平均法^[10]可得:

$$m(H) = -m_0H + \frac{2SF^2}{3m_0}H^2, \quad (5)$$

$$\sigma^2(H) = \frac{4SF^2}{3m_0}H^2. \quad (6)$$

2 平面多体机械系统的随机稳定性

本节先讨论该随机系统的局部稳定性.Itô 微分方程的

Lyapunov 指数的定义如下:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|Z(t, z_0)\|. \quad (7)$$

考虑单自由度拟不可积 Hamilton 系统(2).先假设该系统只含高斯白噪声参激,现通过计算最大 Lyapunov 指数来判定该系统平凡解概率为 1 渐近稳定的条件.为计算该系统的 Lyapunov 指数,需将方程(4)在平凡解 $H = 0$ 处线性化,得

$$dH = \dot{m}(0)Hdt + \dot{\sigma}(0)HdB(t). \quad (8)$$

由解线性 Itô 随机微分方程精确解析解^[11]的方法得方程(7)的解如下:

$$H(t) = H(0) \exp\left(\int_0^t (\dot{m}(0) - (\dot{\sigma}(0))^2/2) ds + \int_0^t \dot{\sigma}(0) dB(s)\right), \quad (9)$$

则系统(2)的最大 Lyapunov 指数为:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln H^{\frac{1}{2}}(u, v) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln H(u, v) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \left(\ln H(0) + \int_0^t (\dot{m}(0) - (\dot{\sigma}(0))^2/2) ds + \int_0^t \dot{\sigma}(0) dB(s) \right) = \\ &= (\dot{m}(0) - (\dot{\sigma}(0))^2/2)/2 = -\frac{m_0}{2}, \end{aligned} \quad (10)$$

由 Oselede 乘积遍历性定理^[12]知,系统平凡解以概率 1 渐近稳定的充要条件是:最大 Lyapunov 指数 $\lambda < 0$,则系统(2)保持局部稳定的条件是 $m_0 > 0$.

因为乘积遍历性定理的 Lyapunov 指数只能识别系统平凡解的局部稳定性,对其全局稳定性则不能判别.但漂移系数 $m(H)$ 和扩散系数 $\sigma^2(H)$ 在受随机参激时经常会出现奇异边界,扩散过程在边界上的性态很大程度上会决定整个扩散过程的性质.所以可利用方程(4)的边界类别对系统平凡解的全局稳定性做出判断,即分析漂移系数与扩散系数的指数及特征标值在边界领域的极限性态.主要分析扩散过程的两个分界性态:左边界 $H \rightarrow 0$ 和右边界 $H \rightarrow \infty$.

当 $H \rightarrow 0$ 时,漂移系数和扩散系数渐近收敛于式(11):

$$\begin{cases} m(H) = -m_0H + O(H), \\ \sigma^2(H) = \frac{4SF^2}{3m_0}H^2 + O(H^2). \end{cases} \quad (11)$$

则利用奇异边界理论的划分标准可知,方程(4)的左边界是第一类奇异边界,计算相应系统左边界 $H = 0$ 的扩散指数 α_l 、漂移指数 β_l 和特征标值 c_l 分别如下:

$$\begin{aligned} \alpha_l &= 2, \beta_l = 1, \\ c_l &= \lim_{H \rightarrow 0^+} \frac{2m(H)H^{\alpha_l - \beta_l}}{\sigma^2(H)} = \frac{3m_0^2}{2SF^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

故由该划分标准可知:当 $c_l < 1$ 时左边界 $H = 0$ 是吸引自然的,当 $c_l = 1$ 时左边界 $H = 0$ 是严格自然的,当 $c_l > 1$ 时左边界 $H = 0$ 是排斥自然的,当左边界是吸引自然时位于状

态空间内部的所有解曲线都渐近收敛到系统平凡解处。

同理,当 $H \rightarrow \infty$ 时 $\sigma^2(H) = \infty$, $m(H) = \infty$, 右边界属于第二类奇异边界, 漂移系数和扩散系数分别渐近收敛于下式:

$$m(H) \rightarrow O(H^2), \sigma^2(H) \rightarrow O(H^2), \quad (13)$$

则当 $H \rightarrow \infty$ 时计算系统右边界的扩散指数 α_γ 、漂移指数 β_γ 和特征标值 c_γ 分别如下:

$$\alpha_\gamma = 2, \beta_\gamma = 2, c_\gamma = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{2m(H) |H|^{\alpha_\gamma - \beta_\gamma}}{\sigma^2(H)}, \quad (14)$$

故当 $\beta_\gamma > \alpha_\gamma - 1$, $m(+\infty) < 0$, $H \rightarrow \infty$ 时, 右边界属于第二类奇异边界是进入边界的。

综上所述, 系统当左边界 $H \rightarrow 0$ 时是吸引自然边界的, 当右边界 $H \rightarrow \infty$ 时是进入边界, 系统所有解曲线都从右边界进入到系统内部被左边界吸引, 左边界 $H \rightarrow 0$ 处此刻是全局稳定的, 并满足 $\frac{3m_0^2}{2SF^2} < 1$ 。

3 平面多体机械系统的随机 Hopf 分岔

稳定性是动力系统的基本要求, 不稳定可能会导致整个系统发生定性改变甚至瘫痪。研究平面多体机械系统的随机 Hopf 分岔行为就是研究该系统在响应随参变量的变化下发生的分岔现象。在随机 Hopf 分岔中有两种类型的分岔: 一种是 D-分岔, 用来研究系统的平稳响应概率密度, 利用 Lyapunov 指数的正负来判别; 另外一种是 P-分岔, 用来研究随机动态系统的联合概率密度, 它取决于峰的个数、位置及形状。研究一个二维随机动态系统的随机分岔, 除了要确定分岔参数, 还要揭示分岔前后系统的性态。利用拟不可积 Hamilton 系统随机平均法会使得随机分岔分析大大简化。

由方程 (4) 生成的连续动态系统是以 H 为初值的唯一强解, 其生成的连续动态系统如下:

$$\varphi(t)H = H + \int_0^t m(\varphi(s)H) dH + \int_0^t \sigma(\varphi(s)H) \circ dB. \quad (15)$$

当 $m(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$ 时, ρ 是 φ 的一个固定点, 对此固定点, $\circ dB$ 是 Stratonovich 随机微分方程意义下的随机参数^[8]。设 $m(H)$ 有界, 对所有 $H \neq 0$ 满足椭圆性条件 $\sigma(H) \neq 0$, 保证了最多只有一个平稳概率密度, 则与 Itô 方程 (4) 相应的 FPK 方程^[13] 求解如下:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial H}(m(H)f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma^2(H)f)}{\partial H^2}, \quad (16)$$

方程 (16) 的解为:

$$f(H) = C \exp\left(-\int_0^H \frac{d\sigma^2(t)/dt - 2m(t)}{\sigma^2(t)} dt\right), \quad (17)$$

求解方程 (17) 的平稳概率密度为:

$$f(H) = CH^\eta \exp(-H), \quad (18)$$

其中 $\eta = \frac{3m_0^2}{2SF^2} - 2$, C 是归一化常数。

当 $H \rightarrow 0$ 时第一类奇异边界与方程 (4) 的漂移与扩散系数之间的关系为

$$\begin{cases} m(H) = O(H^{\beta_1}), \beta_1 = 1, H \rightarrow 0, \\ \sigma^2(H) = O(H^{\alpha_1}), \alpha_1 = 2, H \rightarrow 0, \\ c_1 = \lim_{H \rightarrow 0^+} \frac{2m(H) H^{\alpha_1 - \beta_1}}{\sigma^2(H)}. \end{cases} \quad (19)$$

通过计算解得其稳态概率密度函数如下:

$$f(H) = O\left(H^{-\alpha_1} \exp\left(c_1 \int_0^H x^{\beta_1 - \alpha_1} dx\right)\right), H \rightarrow 0. \quad (20)$$

当 $H \rightarrow 0$, $\beta_1 - \alpha_1 = -1$ 时 $f(H) = O(H^\eta)$, 且

$$\eta = c_1 - \alpha_1 = \frac{3m_0^2}{2SF^2} - 2,$$

C 是归一化常数。

求解系统的联合概率密度函数为:

$$f(u, v) = C \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{nu^2}{2}\right)^\eta \exp\left(-\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{nu^2}{2}\right)\right), \quad (21)$$

则由以上对系统平凡解的稳定性分析, 可归纳为下述三种情形:

- (1) 当 $\eta < -1$ 时 $f(H)$ 不可积, 是一个 δ 函数;
- (2) 当 $-1 < \eta < 0$ 时 $f(H)$ 可积, 是单调递减函数, 存在非平凡概率密度, 并在原点处取得最大值, 同时发生第一次分岔;
- (3) 当 $\eta > 0$ 时 $f(H)$ 可积, 存在非平凡概率密度, 在 $H \neq 0$ 处 $f(H)$ 取得最大值并发生第二次分岔。

综上所述: 系统 (1) 在 $\eta = 0$ 时发生了随机 P-分岔, 在 $\eta = -1$ 时发生了随机 D-分岔, 这两次分岔形成了原系统的随机 Hopf 分岔。

4 数值模拟

图 1-3 是模拟平稳概率密度函数图和联合概率密度函数图, 反映了随机动力系统的分岔行为。取 $n = 1$, $S = 0.5$, $F = 0.5$, 在 $\eta = 0$ 附近, m_0 为分岔参数, 对分岔参数选取不同的值进行数值模拟。

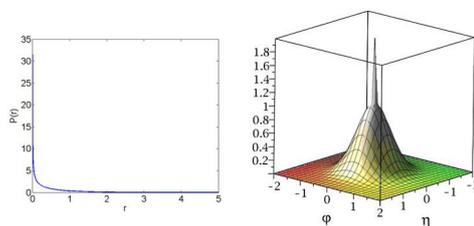


图 1 当 $m_0 = 0.3536$, $\eta = -0.5$ 时
平稳概率密度和联合概率密度函数图

Fig. 1 Stationary probability density and jointly stationary probability density when $m_0 = 0.3536$, $\eta = -0.5$

图 1、图 2 和图 3 表明, 参数在 $m_0 = 0.4082$ 附近变化时, 平稳概率密度函数图像从单调递减函数变为单峰函数, 而联合概率密度函数图像在参数 $m_0 = 0.4082$ 附近变化时, 图像由单峰状变化为火山口状, 说明系统发生了分岔行为。

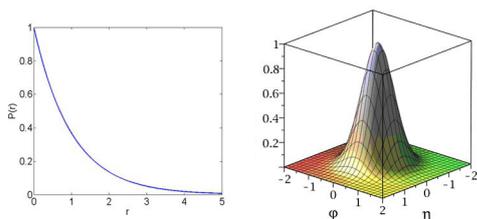


图2 当 $m_0 = 0.4082$ $\eta = 0$ 时
平稳概率密度和联合概率密度函数图

Fig. 2 Stochastic probability density and jointly stationary probability density when $m_0 = 0.4082$ $\eta = 0$.

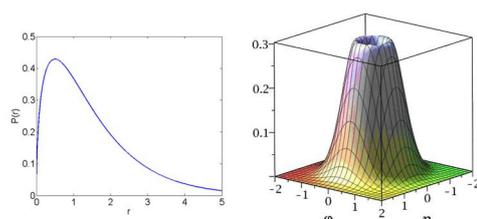


图3 当 $m_0 = 0.4564$ $\eta = 0.5$ 时
平稳概率密度和联合概率密度函数图

Fig. 3 Stochastic probability density and jointly stationary probability density when $m_0 = 0.4564$ $\eta = 0.5$.

5 结论

转子间隙摩擦和材料的不均匀以及外界随机因素的影响,会使平面多体机械系统不稳定发生分岔行为,文章首先建立该系统的随机非线性动力学模型,得到 Itô 随机微分方程,且求出满足系统响应扩散过程转移概率密度函数的 FPK 方程.然后,运用拟不可积 Hamilton 理论对平面多体机械系统进行 Hopf 分岔分析,利用 Lyapunov 指数和奇

异边界理论对该系统的局部和全局稳定性分别进行讨论.最后,针对系统的平稳概率密度函数 $f(H)$ 和联合概率密度函数 $f(u, \nu)$ 在 $\eta = 0$ m_0 为分岔参数时做出其数值模拟结果.结合图像分析结果表明:参数在 $m_0 = 0.4082$ 附近变化时,平稳概率密度函数图像从单调递减函数变为单峰函数,联合概率密度函数图像由单峰状变化为火山口状,系统发生了分岔行为.

参考文献:

- [1] ZHAO Bo, ZHOU Kun, XIE Youbai. A new numerical method for planar multi-body system with mixed lubricated revolute joint [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2016, 113(7): 105-119.
- [2] LAI Xiongming, HE Huang, LAI Qinfang, et al. Computational prediction and experimental validation of revolute joint clearance wear in the low-velocity planar mechanism [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 85(2): 963-976.
- [3] BAI Zhengfeng, SUN Yi. A study on dynamics of planar multi-body mechanical systems with multiple revolute clearance joints [J]. European Journal of Mechanics, 2016, 60(11): 95-111.
- [4] LUO Shaokai, HE Jinman, XU Yanli, et al. Fractional generalized Hamilton method for equilibrium stability of dynamical systems [J]. Applied Mathematics Letters, 2016, 60(10): 14-20.
- [5] 滕俊超, 朱位秋. 谐和与宽带随机激励下拟可积哈密顿系统的最优时滞控制 [J]. 振动工程学报, 2016, 29(2): 207-213.
TENG Junchao, ZHU Weiqiu. Optimal time-delay control of quasi integrable Hamiltonian systems under combined harmonic and wide-band random excitations [J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(2): 207-213.
- [6] 白宝丽, 张建刚, 闫宏明. 一类随机的 SIR 流行病模型的动力学行为分析 [J]. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(4): 14-24.
BAI Baoli, ZHANG Jiangang, YAN Hongming. The dynamic behavior analysis of a stochastic SIR epidemic model [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2017, 52(4): 14-24.
- [7] GU Xudong, ZHU Weiqiu. A stochastic averaging method for analyzing vibro-impact systems under Gaussian white noise excitations [J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(9): 2632-2642.
- [8] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制-Hamilton 理论体系框架 [M]. 北京: 北京科学出版社, 2003: 130-395.
ZHU Weiqiu. Nonlinear stochastic dynamics and control-Hamilton theory system framework [M]. Beijing: Beijing Science Press, 2003: 130-395.
- [9] ZHU Weiqiu, HUANG Zhilong. Stochastic averaging of quasi-integrable hamiltonian systems [J]. Journal of Sound & Vibration, 1997, 64(4): 178-195.
- [10] JIA Wantao, ZHU Weiqiu. Stochastic averaging of quasi-integrable and non-resonant Hamiltonian systems under combined Gaussian and Poisson white noise excitations [J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 76(2): 1271-1289.
- [11] KHASHINSKII R. Stochastic stability of differential equations [C] // Stochastic Modelling & Applied Probability. Springer, 2012: 221-231.
- [12] CHIGANSKY P. An ergodic theorem for filtering with applications to stability [J]. Systems & Control Letters, 2006, 55(11): 908-917.
- [13] ZHU W Q, HUANG Z L. Stochastic Hopf bifurcation of quasi-nonintegrable-Hamiltonian systems [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1999, 34(3): 437-447.

责任编辑: 郭红建