信阳师范学院学报: 自然科学版
第 28 卷　第 1 期　2015 年 1 月

Journal of Xinyang Normal University
Natural Science Edition Vol. 28 No. 1 Jan. 2015

DOI: 10. 3969/j. issn. 1003-0972. 2015. 01. 009

三维等熵欧拉方程组解的爆破

朱旭生,艾利娜*,汤传扬

(华东交通大学 理学院,江西 南昌 330013)

摘　要: 研究了带阻尼项的三维等熵欧拉方程组初值问题经典解的爆破. 在 $M(0)<0$ 条件下,若初始动量的某些泛函足够大时,得到了其经典解在有限时间内必定发生爆破的结论.

关键词: 三维等熵欧拉方程组; 泛函; 爆破

中图分类号: O175. 4　　文献标志码: A　　文章编号: 1003-0972(2015)01-0033-03

Blow Up of Isentropic Euler Equations in Three Dimensions

Zhu Xusheng,Ai Lina*,Tang Chuanyang

(School of Science,East China Jiaotong University, Nanchang 330013,China)

Abstract: The blow up of the initial value problems of classical solutions of the isentropic Euler equations with damping term in three dimensions was investigated. Under the condition of $M(0)<0$, if the initial momentum of certain functions is large enough, then it follows that the classical solution must blow up in a limited time.

Key words: isentropic Euler equations in three dimensions; functions; blow up

0　引言

考虑三维空间中带阻尼项等熵欧拉方程组:

$$\begin{cases}\rho_t+\nabla\cdot(\rho u)=0,\\(\rho u)_t+\nabla\cdot(\rho u\otimes u)+\nabla P=-\alpha\rho u\end{cases}\tag{1}$$

的 Cauchy 问题,对应的初始数据为

$$\begin{cases}(\rho,u)|_{t=0}=(\bar{\rho}+\rho_0(x)>0,u_0(x)),\\\operatorname{supp}(\rho_0,u_0)\subseteq\{x\,|\,|x|\leqslant R\},\end{cases}\tag{2}$$

其中 ρ,u,P 分别代表气体的密度、速度和压强. 常数 $\alpha>0$ 是阻尼系数,状态方程 $P=A\rho^\gamma(A>0,\gamma>1)$,$\gamma$ 是绝热指数. $\rho_0(x)=\rho(x,0)$,$u_0(x)=u(x,0)$,常数 $\bar{\rho}>0$.

对欧拉方程组的 Cauchy 问题解的研究已有很多,主要集中在经典解的整体存在性以及经典解爆破的研究. 在文献[1]中,王维克和杨彤研究了带阻尼项的等熵欧拉方程组的初值问题,当初始数据是在一个常状态附件的小扰动时,得到了经典解的整体存在性. 文献[2]研究了三维可压缩欧拉方程组的经典解,并用能量估计的方法证明了解的整体存在性. 而文献[3]报道了有界区域内带阻尼项的可压缩欧拉方程组的初边值问题的经典解的整体存在. 文献[4-5]报道了带阻尼项的等熵欧拉方程组,在假设某些初始数据较大时,构造泛函,得出经典解的爆破. 文献[6-8]报道了真空状态下的欧拉方程组正规解的爆破. 文献[9]考虑带有温度项的欧拉方程,引入特殊速度函数,进而研究欧拉方程的爆破现象. 文献[10]充分利用了轴对称和理想气体状态方程的特点,当关于初始速度的泛函足够大时,经典解会在有限时间内爆破的结论. 本文继续研究三维空间中带阻尼项的等熵 Euler 方程组的 Cauchy 问题,结合文献[4-6]中的方法,在 $M(0)<0$ 条件下,当初始数据较大时,通过构造泛函,证明其经典解在有限时间内必定发生爆破的结论.

1　预备知识

定义:

$$\sigma(\rho)=\sqrt{P'(\rho)}\text{ 且 }\bar{\sigma}=\sigma(\bar{\rho}),\bar{\rho}>0,$$

$$M(t)=\int_{\mathbf{R}^3}(\rho-\bar{\rho})\,\mathrm{d}x,$$

$$B(t)=\{\,|x|<R+\bar{\sigma}t\},$$

$$A(t)=(R+\bar{\sigma}t)^2(M(0)+\bar{\rho}\,|B(t)|)$$

且 $|B(t)|=\dfrac{4}{3}\pi(R+\bar{\sigma}t)^3$. 这里 σ 定义为速度.

根据经典解的局部能量估计知道方程组的经典解具有有限传播速度的性质,即

引理 1[2]　设 (ρ,u) 是 Cauchy 问题(1)和(2)在 $\mathbf{R}^3\times$

收稿日期: 2014-04-28; 修订日期: 2014-10-23; *. 通信联系人,E-mail: jichuailina@sina.com

基金项目: 国家自然科学基金项目(11161021)

作者简介: 朱旭生(1968-),男,江西高安人,副教授,博士,主要从事偏微分方程研究.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$[0,T)$ 的 C^1 解,则 $\operatorname{supp}(\rho-\bar{\rho},u)\subset\{|x|\leqslant R+\bar{\sigma}t\}$, $0\leqslant t<T$,且 $\rho(x,t)>0$.

2 主要结论

在 $M(0)<0$ 条件下得到以下结论:

定理1 设 $F(t)=\int_{\mathbf{R}^3}x\cdot\rho u\mathrm{d}x$, (ρ,u) 是Cauchy问题(1)和(2)在 $\mathbf{R}^3\times[0,\tau)$ 的 C^1 解. 若对固定时刻 $T>0$,有

$$F(0)>\max\{2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)/T,(-6\bar{\sigma}M(0)\mathrm{e}^{2\alpha T}A(T))^{\frac{1}{2}}\},\tag{3}$$

则 $\tau<T$.

证明 假设 (ρ,u) 是方程在时间区间 $[0,\tau)$ 的 C^1 解,且 $T<\tau$,则由方程组(1)可得

$$M'(t)=-\int_{\mathbf{R}^3}\operatorname{div}(\rho u)\mathrm{d}x=0,$$

则

$$M(t)=M(0).\tag{4}$$

对 $F'(t)$ 分部积分,由方程组(1)可得到

$$F'(t)+\alpha F(t)=\int_{\mathbf{R}^3}\rho|u|^2+3(P-\bar{P})\mathrm{d}x,$$

其中 $\bar{P}=P(\bar{\rho})$.

根据状态方程 $P=A\rho^\gamma$ 且 $\gamma>1$,可得

$$\int_{\mathbf{R}^3}(P-\bar{P})\mathrm{d}x\geqslant\int_{\mathbf{R}^3}P'(\bar{\rho})(\rho-\bar{\rho})\mathrm{d}x=\bar{\sigma}^2M(0),$$

所以

$$F'(t)+\alpha F(t)\geqslant\int_{\mathbf{R}^3}\rho|u|^2\mathrm{d}x+3\bar{\sigma}^2M(0).\tag{5}$$

根据引理1和Cauchy-Schwartz不等式可得:

$$F^2(t)=(\int_{\mathbf{R}^3}x\cdot\rho u\mathrm{d}x)^2=(\int_{B(t)}x\cdot\rho u\mathrm{d}x)^2\leqslant$$
$$(\int_{B(t)}|x|^2\rho\mathrm{d}x)(\int_{B(t)}\rho|u|^2\mathrm{d}x).\tag{6}$$

又由式(4)可得

$$\int_{B(t)}|x|^2\rho\mathrm{d}x\leqslant(R+\bar{\sigma}t)^2\int_{B(t)}\rho\mathrm{d}x=$$
$$(R+\bar{\sigma}t)^2(M(0)+\frac{4\pi}{3}\bar{\rho}(R+\bar{\sigma}t)^3)=A(t).\tag{7}$$

而 $A'(t)>0$,即 $A(t)$ 递增,从 $A(t)$ 的定义可知 $A(0)>0$,所以 $A(t)>0$ 恒成立,从而综合式(5)、(6)和(7)可得以下微分不等式:

$$F'(t)+\alpha F(t)\geqslant F^2(t)A^{-1}(t)+3\bar{\sigma}M(0).\tag{8}$$

可设 $G(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}F(t)$,则 $G'(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}(F'(t)+\alpha F(t))$,所以

$$G'(t)\geqslant\frac{G^2(t)}{\mathrm{e}^{\alpha t}A(t)}+3\bar{\sigma}M(0)\mathrm{e}^{\alpha t}.\tag{9}$$

而当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时,则

$$G'(t)\geqslant\frac{G^2(t)}{\mathrm{e}^{\alpha t}A(t)}+3\bar{\sigma}M(0)\mathrm{e}^{\alpha t}>$$
$$\frac{G^2(t)}{\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)}+3\bar{\sigma}M(0)\mathrm{e}^{\alpha T},$$

那么

$$G'(0)>\frac{G^2(0)}{\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)}+3\bar{\sigma}M(0)\mathrm{e}^{\alpha T}.\tag{10}$$

而由 $F(0)=G(0)$, $T<\tau$ 及式(3)得出:

$$G^2(0)>-6\bar{\sigma}\mathrm{e}^{2\alpha T}M(0)A(T),$$

即 $G'(t)>0$. 那么 $G(t)$ 一定时间内是增加的,所以

$$\frac{G^2(t)}{2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)}+3\bar{\sigma}M(0)\mathrm{e}^{\alpha T}>0,$$

那么得到:

$$G'(t)\geqslant\frac{G^2(t)}{\mathrm{e}^{\alpha t}A(t)}+3\bar{\sigma}M(0)\mathrm{e}^{\alpha t}>$$
$$\frac{G^2(t)}{2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)}+\frac{G^2(t)}{2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)}+3\bar{\sigma}M(0)\mathrm{e}^{\alpha T}>$$
$$\frac{G^2(t)}{2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)}.\tag{11}$$

对式(11)在 $[0,t]$ 上积分,可得到

$$\frac{1}{G(0)}-\frac{1}{G(t)}>\frac{t}{2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)}.$$

而 $F(0)=G(0)$,所以

$$G(t)>\frac{M}{F^{-1}(0)-2^{-1}\mathrm{e}^{-\alpha T}A^{-1}(T)t}.$$

对任意 $t\in[0,T]$ 成立,这与定理条件 $F(0)>2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)/T$ 矛盾,因上式右边当 $t\to T_1^-$ 时趋于无穷大,这里 $T_1<T$ 满足 $F(0)>2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)/T_1$. 故上式中 t 必须满足 $t<T_1$,从而 $\tau\leqslant T_1$,进一步有 $\tau<T$. 证毕.

定理1是假设 $F(t)=\int_{\mathbf{R}^3}x\cdot\rho u\mathrm{d}x$,并且初始动量泛函足够大条件下,通过构造泛函,证明了Cauchy问题的经典解在有限时间内爆破. 而当我们令 $F(t)=\int_{\mathbf{R}^3}|x|^2x\cdot\rho u\mathrm{d}x$ 时,也同样得到经典解在有限时间内爆破的结论.

定理2 假设 $F(t)=\int_{\mathbf{R}^3}|x|^2x\cdot\rho u\mathrm{d}x$,且对有限时刻 $\tau>0$, (ρ,u) 是Cauchy问题(1)(2)在 $\mathbf{R}^3\times[0,\tau)$ 的 C^1 解,若对任意固定时刻 $T>0$,有

$$F(0)>\max\{2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)/T,(8\pi\bar{P}\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)(R+\bar{\sigma}T)^5)^{\frac{1}{2}}\},\tag{12}$$

则 $\tau<T$.

证明 假设 (ρ,u) 是方程在时间区间 $[0,\tau)$ 的 C^1 解,且 $T<\tau$,同样对 $F'(t)$ 进行分部积分,得:

$$F'(t)=\int_{\mathbf{R}^3}|x|^2x\cdot\rho_tu\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^3}|x|^2x\cdot\rho u_t\mathrm{d}x=$$
$$-\alpha\int_{\mathbf{R}^3}|x|^2x\cdot\rho u\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}|x|^2\operatorname{div}((x\cdot u)\rho u)-$$
$$|x|^2x\cdot\nabla P+\rho|x|^2|u|^2\mathrm{d}x,$$

所以

$$F'(t)+\alpha F(t)\geqslant$$
$$\int_{\mathbf{R}^3}\rho|x|^2|u|^2\mathrm{d}x-5\int_{\mathbf{R}^3}|x|^2\bar{P}\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\int_{\mathbf{R}^3}\rho|x|^2|u|^2\mathrm{d}x-4\pi\bar{P}(R+\bar{\sigma}t)^5.\tag{13}$$

根据引理1和Cauchy-Schwartz不等式可得到:

$$F^2(t)=(\int_{\mathbf{R}^3}|x|^2x\cdot\rho u\mathrm{d}x)^2=$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\left(\int_{B(t)} |x|^2 x\cdot\rho u\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant$$

$$\left(\int_{B(t)} |x|^2\rho\mathrm{d}x\right)\left(\int_{B(t)}\rho\,|x|^2\,|u|^2\mathrm{d}x\right). \tag{14}$$

又由式(7)可得

$$\int_{B(t)} |x|^2\rho\mathrm{d}x \leqslant (R+\bar{\sigma}t)^2\int_{B(t)}\rho\mathrm{d}x =$$

$$(R+\bar{\sigma}t)^2\left(M(0)+\int_{B(t)}\bar{\rho}\mathrm{d}x\right) = A(t). \tag{15}$$

结合式(13)、(14)和(15)可得以下微分不等式

$$F'(t)+\alpha F(t) \geqslant F^2(t)A^{-1} - 4\pi\bar{P}(R+\bar{\sigma}t)^5,$$

而由定理1可知$A(t)>0$且递增，所以

$$F'(t)+\alpha F(t) \geqslant F^2(t)A^{-1}(t) - 4\pi\bar{P}(R+\bar{\sigma}t)^5.$$

我们仍设$G(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}F(t)$，则$G'(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}(F'(t)+\alpha F(t))$，所以

$$G'(t) \geqslant \frac{G^2(t)}{\mathrm{e}^{\alpha t}A(t)} - 4\pi\bar{P}(R+\bar{\sigma}t)^5. \tag{16}$$

而当$0\leqslant t\leqslant T$时，则

$$G'(t) \geqslant \frac{G^2(t)}{\mathrm{e}^{\alpha t}A(t)} - 4\pi\bar{P}(R+\bar{\sigma}t)^5 >$$

$$\frac{G^2(t)}{\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)} - 4\pi\bar{P}(R+\bar{\sigma}T)^5,$$

那么

$$G'(0) > \frac{G^2(0)}{\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)} - 4\pi\bar{P}(R+\bar{\sigma}T)^5. \tag{17}$$

同理，由$F(0)=G(0)$，$T<\tau$及式(12)，得$G'(0)>0$，那么$G(t)$一定时间内是增加的，所以

$$\frac{G^2(t)}{2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)} - 4\pi\bar{P}(R+\bar{\sigma}T)^5 > 0,$$

那么

$$G'(t) \geqslant \frac{G^2(t)}{\mathrm{e}^{\alpha t}A(t)} - 4\pi\bar{P}(R+\bar{\sigma}t)^5 >$$

$$\frac{G^2(t)}{2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)} + \frac{G^2(t)}{2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)} - 4\pi\bar{P}(R+\bar{\sigma}T)^5 >$$

$$\frac{G^2(t)}{2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)}. \tag{18}$$

对式(18)在$[0,t]$上积分，可得到

$$\frac{1}{G(0)} - \frac{1}{G(t)} > \frac{t}{2\mathrm{e}^{\alpha T}A(T)},$$

由$F(0)=G(0)$及式(12)可得

$$G(t) > \frac{1}{F^{-1}(0) - 2^{-1}\mathrm{e}^{-\alpha T}A^{-1}(T)t},$$

对任意$t\in[0,T]$成立.

同理，再由定理1可得$\tau<T$. 证毕.

3 结语

本文在满足了一些条件的基础上，研究了三维等熵欧拉方程组的柯西问题，获得的主要结论是：在Sideris T. C.研究结果的基础上，当初始数据足够大时，运用泛函分析的方法，得到两种条件下，欧拉方程组经典解爆破的结论，分析过程清晰简单. 本文虽然研究了等熵欧拉方程组在三维空间中经典解的爆破问题，而对于在一维、二维空间的研究没有涉及，所以今后有待于研究的是运用本文中的方法，解决一维、二维空间中，等熵欧拉方程组经典解的爆破问题.

参考文献:

[1] Wang W K, Yang T. The pointwise estimates of solutions for Euler equations with damping in multi-dimensions [J]. Journal of Differential Equations, 2001, 173(2): 410-450.

[2] Thomas C, Sideris T. Wang D H. Long time behavior of solutions to the 3D compressible euler equations with damping [J]. Communications in partical differential equations, 2003, 28(3): 795-816.

[3] Pan R H, Zhao K. The 3D compressible Euler equations with damping in a bounded domain [J]. Journal of Differential Equations, 2009, 246(2): 581-596.

[4] Sideris T C. Formation of singularities in three dimensional compressible fluids [J]. Comm Math Phys, 1985, 101(4): 448-475.

[5] 李翠，朱旭生，李芳娥. 带阻尼项欧拉方程组解的爆破 [J]. 江西科学，2010，28(3)：283-284，294.

[6] Liu T P, Yang T. Compressible euler equations with vacuum [J]. Journal of Differential Equations, 1997, 140(2): 223-237.

[7] Yang T. Some recent results on compressible flow with vacuum [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2000, 4(3): 33-44.

[8] 熊显萍，朱旭生. 带非线性阻尼项的等熵欧拉方程组正规解的爆破 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2014，36(3)：71-76.

[9] Liang Z L. Blow up phenomena of the compressible Euler equations [J]. J Math Appl, 2010, 370(3): 506-510.

[10] Zhu X S, Tu A H. Blow up of the axis-symmetric solutions for the IBVP of the isentropic Euler equations [J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications, 2014, 95(2): 99-106.

责任编辑：郭红建

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net