

DOI: 10.3969/j.issn.1003-0972.2014.04.036

基于 FDV 模型的土体中部分埋入端承 摩擦桩的水平动力阻抗

闫启方* 余萍 陈晴晴

(信阳师范学院 土木工程学院, 河南 信阳 464000)

摘要:利用 Winkler 弹簧-阻尼器来描述桩土之间的动力相互作用,得到了分数导数黏弹性(FDV)模型描述的土体的刚度系数和阻尼系数.利用传递矩阵法并考虑埋入部分和外露部分桩基的连续性条件,求解了基于 FDV 模型的土体中部分埋入端承摩擦桩的水平振动,得到了桩顶的水平动力阻抗.研究了分数导数的阶数、外露部分桩长和土体本构模型参数对桩水平振动的影响.研究表明:分数导数的阶数和本构模型参数对部分埋入桩的水平刚度有一定的影响,而对其等效阻尼的影响很小;外露部分桩长对水平动力阻抗的影响较大.

关键词:部分埋入桩;分数导数;黏弹性;水平动力阻抗

中图分类号:TU573.12 **文献标志码:**A **文章编号:**1003-0972(2014)04-0614-05

Lateral Dynamic Impedance of Partially Embedded End Bearing Friction Pile in Soil Described by Fractional Derivative Viscoelastic Model

Yan Qifang*, Yu Ping, Chen Qingqing

(School of Civil Engineering, Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China)

Abstract: The dynamic interaction between pile and pile around soil was described by Winkler spring-damping, and the stiffness and damping coefficients of the pile around soil were obtained. By considering the continuous conditions of the embedded part and exposed part of pile, the lateral vibration of partially embedded end bearing friction pile in fractional derivative viscoelastic soil was solved with transfer matrix method, and the dynamic impedance at pile head were obtained. The influence of the order of fractional derivative, length of exposed part of pile and constitutive model parameters on the lateral vibration of pile were investigated. It is shown that the order of fractional derivative and the constitutive model parameters had a certain influence on the horizontal dynamic stiffness, but had little influence on the equivalent damping, and the length of exposed part of pile had great effect on the horizontal dynamic impedance of the pile.

Key words: partially embedded pile; fractional derivative; viscoelastic; lateral dynamic impedance

0 引言

随着桩基在各类工程基础中的广泛应用,由于桩-土动力相互作用和桩基动力阻抗的研究是进行土体-桩基-上部结构耦合动力相互作用研究的基础,动态激励作用下桩基动态响应的研究越来越被关注并取得了一定的研究成果^[1-3].以往对于桩基振动的研究,主要存在两个方面的不足:一是将桩基看作完全埋入桩,随着部分埋入桩的大量应

用,将桩基理想化为完全埋入桩而忽略外露部分桩长的影响与工程实际不符;另外,研究结果表明土体具有黏弹性等性质,无论是进行桩基静态响应的研究还是动态响应的研究,都不应该忽略土体的黏弹性力学性质对桩基静动力学特性的影响.为此,Novak^[4]首先运用连续介质力学方法研究了线性黏弹性土-桩的相互作用;胡昌斌等^[5]采用黏弹性连续土介质模型对成层土中桩土纵向耦合振动进行了解析研究.周绪红等^[6]研究了黏弹性介质中桩受轴力作

收稿日期:2014-01-16;修订日期:2014-06-24;*.通信联系人,E-mail:yqf815@126.com

基金项目:河南省科技发展计划项目(112300410105);河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目(2013GGJS-421);信阳师范学院重大课题预研项目(2013ZDYY19);信阳师范学院青年骨干教师资助计划(201107-2012007);信阳师范学院青年科研基金(2014-QN-063);信阳师范学院大学生科研基金项目(2013-DXSZD-20)

作者简介:闫启方(1979-),女,河南驻马店人,副教授,硕士,研究方向:黏弹性理论、岩土力学等.

用时水平动力作用下桩的动力阻抗.近年来,分数导数黏弹性(FDV)模型作为一种描述黏弹性材料力学特性较为合理的本构模型,逐渐被用来描述土体的应力应变关系,并被用来研究完全埋入桩的振动特性.例如,刘林超等^[7]研究了分数导数模型描述的饱和土中桩基的纵向振动问题;骆文和^[8]利用分数导数黏弹性模型描述土体的应力和应变关系,研究了土层中单桩的扭转振动;姚庆钊等^[9]针对土体中单桩的扭转振动问题,分别采用 Kelvin 模型、三参数固体模型和分数阶黏弹性(FDV)模型描述桩周土体的本构关系,对黏弹性土体中单桩的扭转振动进行了研究.本文利用分数导数黏弹性模型刻画桩周土体应力应变关系,利用 Winkler 弹簧-阻尼器模型描述桩土相互作用,研究分数导数黏弹性土体中部分埋入桩基的水平振动.

1 分数导数黏弹性土层的纵向振动控制方程

研究图 1 所示厚度为 l_1 的黏弹性土层中的部分埋入端承摩擦桩在简谐荷载作用下的水平振动,简谐荷载频率为 ω ,外露部分桩长为 l_2 ,桩身半径为 r_0 ,弹性模量为 E_p ,密度为 ρ_p .

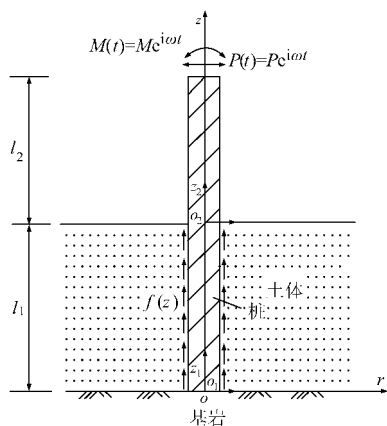


图 1 部分埋入桩模型

Fig. 1 Model of partially embedded pile

我们用 Novak 薄层法来求解 FDV 土层的 Winkler 模型的刚度系数和阻尼系数,不考虑土层的竖向位移,将桩周土体看作无穷多带一圆孔的薄的土层,且薄土层之间互相独立,且与 z 无关.可以建立分数导数黏弹性土层的水平振动方程为^[10]

$$(1 + \tau_\varepsilon^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}) \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2}{r} \mu \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} \right) = \rho (1 + \tau_\sigma^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}) \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$(1 + \tau_\varepsilon^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}) \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{r \partial \theta} + 2\mu \frac{\partial \omega_z}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) = \rho (1 + \tau_\sigma^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \quad (2)$$

其中,

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta},$$

$$\omega_z = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right),$$

其中: $\tau_\varepsilon, \tau_\sigma$ 为黏弹性土体的模型材料参数; ρ 为黏弹性土体密度; λ, μ 为黏弹性土体的两个拉梅常数且满足 $\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu}$; u_r, u_θ 为土层径向位移和环向位移.

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

为 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 阶黎曼-刘维尔分数导数^[11], $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数. 设

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (3)$$

式中 $\bar{r} = \frac{r}{H}$. 考虑分数导数的 Fourier 变换及性质,对 FDV

土层振动方程(1)和式(2)两边进行 Fourier 变换,并考虑式(3)可得

$$(\nabla^2 - q^2) \varphi = 0, \quad (4)$$

$$(\nabla^2 - g^2) \psi = 0, \quad (5)$$

这里,

$$\bar{z} = \frac{r}{l_1} \bar{\omega} = \frac{l_1 \omega}{v_s} T_\sigma = \tau_\sigma v_s / l_1, \quad T_\varepsilon = \tau_\varepsilon v_s / l_1,$$

$$v_s = \sqrt{\mu/\rho}, \quad \kappa^2 = \frac{1 + T_\sigma^\alpha (i\bar{\omega})^\alpha}{1 + T_\varepsilon^\alpha (i\bar{\omega})^\alpha},$$

$$g^2 = -\bar{\omega}^2 \kappa^2 q^2 = -\frac{1-2\nu}{2-2\nu} \bar{\omega}^2 \kappa^2,$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

利用分离变量法求解式(4)和式(5)可得

$$\varphi = (A_{11} \sin m\theta + B_{11} \cos m\theta) (C_{11} K_m(q\bar{r}) + D_{11} I_m(q\bar{r})), \quad (6)$$

$$\psi = (A_{22} \sin m\theta + B_{22} \cos m\theta) (C_{22} K_m(g\bar{r}) + D_{22} I_m(g\bar{r})), \quad (7)$$

其中: $A_{11}, B_{11}, C_{11}, D_{11}, A_{22}, B_{22}, C_{22}, D_{22}$ 为待定系数. 考虑无穷远处土体边界条件,以及 u_r 为偶函数, u_θ 为奇函数,可知 $m = 1, D_{11} = D_{22} = 0, A_{11} = 0, B_{22} = 0$. 则势函数 φ, ψ 的表达式分别为

$$\varphi = A \cos \theta K_1(q\bar{r}), \quad (8)$$

$$\psi = B \sin \theta K_1(g\bar{r}). \quad (9)$$

由式(3)可以得到 FDV 土层无量纲化后的径向和环向位移分别为

$$\bar{u}_r = \cos \theta \left(-\frac{A}{r} K_1(q\bar{r}) - AqK_0(q\bar{r}) + \frac{BK_1(g\bar{r})}{\bar{r}} \right), \quad (10)$$

$$\bar{u}_\theta = \sin \theta \left(-\frac{AK_1(q\bar{r})}{\bar{r}} + \frac{B}{\bar{r}} K_1(g\bar{r}) + BgK_0(g\bar{r}) \right). \quad (11)$$

将埋入部分桩与土之间的动力相互作用等效为 Winkler 弹簧-阻尼器模型,为了得到土体的刚度系数和阻尼系数,设埋入部分桩身的无量纲水平位移为 1,则土体圆孔壁处的径向和环向位移满足

$$\begin{cases} \bar{u}_r(\bar{r}_0, \theta, t) = 1, \theta = 0, \\ \bar{u}_\theta(\bar{r}_0, \theta, t) = -1, \theta = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (12)$$

其中 $\bar{r}_0 = \frac{r_0}{l_1}$. 由式(10)、(11) 和(12) 可得

$$\begin{cases} A = -\frac{(2/\bar{r}_0)K_1(g\bar{r}_0) + gK_0(g\bar{r}_0)}{C}, \\ B = -\frac{(2/\bar{r}_0)K_1(q\bar{r}_0) + qK_0(q\bar{r}_0)}{C}, \end{cases} \quad (13)$$

其中,

$$C = (q/r_0)K_0(q\bar{r}_0)K_1(g\bar{r}_0) + (g/\bar{r}_0)K_1(q\bar{r}_0)K_0(g\bar{r}_0) + qgK_0(q\bar{r}_0)K_0(g\bar{r}_0).$$

由式(10)、式(11) 可知 埋入部分桩周土体产生单位水平位移需要的水平力为

$$\bar{P}_x = \pi\bar{r}_0 \left(-\frac{2\nu}{1-2\nu}Aq^2K_1(q/2) - Bg^2K_1(g/2) \right) = k + ci, \quad (14)$$

其中: k, c 即为 Winkler 弹簧-阻尼器模型的刚度系数和阻尼系数.

2 基于 FDV 模型的土中部分埋入桩水平振动求解

对于埋入部分桩基建立局部坐标, 考虑桩周土体的作用, 可以建立埋入部分桩基的无量纲水平振动方程为

$$\frac{d^4 U_{p1}(\bar{z}_1)}{d\bar{z}_1^4} - \lambda_1^4 U_{p1}(\bar{z}_1) = 0, \quad (15)$$

其中: $\lambda_1^4 = \frac{4(\bar{\rho}_p \bar{\omega}^2 - k - ci)}{\bar{E}_p \bar{r}_0^4}$, $\bar{E}_p = \frac{E_p}{\mu}$, $\bar{\rho}_p = \frac{\rho_p}{\rho}$, U_{p1} 为埋入

部分桩基的无量纲化水平位移幅值移 $\bar{z}_1 = \frac{z_1}{l_1}$, z_1 为局部坐标, 如图 1. 求解式(15) 可得

$$U_{p1} = C_{11} \cosh(\lambda_1 \bar{z}_1) + C_{12} \sinh(\lambda_1 \bar{z}_1) + C_{13} \cos(\lambda_1 \bar{z}_1) + C_{14} \sin(\lambda_1 \bar{z}_1), \quad (16)$$

其中 $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}$ 为待定系数. 设部分埋入桩桩底的边界条件为

$$\begin{cases} U_{p1}(\bar{z}_1) \Big|_{\bar{z}_1=0} = U_{p1}(0), \\ \frac{dU_{p1}(\bar{z}_1)}{d\bar{z}_1} \Big|_{\bar{z}_1=0} = \theta_{p1}(0), \\ -\frac{\bar{E}_p \bar{r}_0^4}{4} \frac{d^2 U_{p1}(\bar{z}_1)}{d\bar{z}_1^2} \Big|_{\bar{z}_1=0} = Q_{p1}(0), \\ -\frac{\bar{E}_p \bar{r}_0^4}{4} \frac{d^3 U_{p1}(\bar{z}_1)}{d\bar{z}_1^3} \Big|_{\bar{z}_1=0} = M_{p1}(0). \end{cases} \quad (17)$$

由此可以确定 $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}$, 进而可以建立埋入部分桩基桩顶和桩底位移、转角、剪力和弯矩的关系为

$$\begin{bmatrix} U_{p1}(1) \\ \theta_{p1}(1) \\ Q_{p1}(1) \\ M_{p1}(1) \end{bmatrix} = [T_1] \begin{bmatrix} U_{p1}(0) \\ \theta_{p1}(0) \\ Q_{p1}(0) \\ M_{p1}(0) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中:

$$[T_1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & k_1 a_{13} & -k_2 a_{12} & -k_3 a_{14} \\ \frac{a_{14}}{k_1} & a_{11} & -\frac{k_2 a_{13}}{k_1} & -\frac{k_3 a_{12}}{k_1} \\ -\frac{a_{12}}{k_2} & -\frac{k_1 a_{14}}{k_2} & a_{11} & \frac{k_3 a_{13}}{k_2} \\ -\frac{a_{13}}{k_3} & -\frac{k_1 a_{12}}{k_3} & \frac{k_2 a_{14}}{k_3} & a_{11} \end{bmatrix},$$

$$a_{11} = \cosh(\lambda_1) + \cos(\lambda_1),$$

$$a_{12} = \cosh(\lambda_1) - \cos(\lambda_1),$$

$$a_{13} = \sinh(\lambda_1) + \sin(\lambda_1),$$

$$a_{14} = \sinh(\lambda_1) - \sin(\lambda_1),$$

$$k_1 = \frac{1}{\lambda_1}, k_2 = \frac{4}{\lambda_1^2 \bar{E}_p \bar{r}_0^4}, k_3 = \frac{4}{\lambda_1^3 \bar{E}_p \bar{r}_0^4}.$$

对于外露部分桩基建立局部坐标, 可以建立外露部分桩基的无量纲水平振动方程为

$$\frac{d^4 U_{p2}(\bar{z}_2)}{d\bar{z}_2^4} - \lambda_2^4 U_{p2}(\bar{z}_2) = 0, \quad (19)$$

其中: $\lambda_2^4 = \frac{4\bar{\rho}_p \bar{\omega}^2}{\bar{E}_p \bar{r}_0^4}$, U_{p2} 为外露部分桩基的无量纲化水平位移幅

值移 $\bar{z}_2 = \frac{z_2}{l_1}$, z_2 为局部坐标. 同样地, 可以确定外露部分桩

基桩顶和桩底位移、转角、剪力和弯矩的关系为

$$\begin{bmatrix} U_{p2}(L_2) \\ \theta_{p2}(L_2) \\ Q_{p2}(L_2) \\ M_{p2}(L_2) \end{bmatrix} = [T_2] \begin{bmatrix} U_{p2}(0) \\ \theta_{p2}(0) \\ Q_{p2}(0) \\ M_{p2}(0) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中: $L_2 = \frac{l_2}{l_1}$,

$$[T_2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{21} & s_1 a_{23} & -s_2 a_{22} & -s_3 a_{24} \\ \frac{a_{24}}{s_1} & a_{21} & -\frac{s_2 a_{23}}{s_1} & -\frac{s_3 a_{22}}{s_1} \\ -\frac{a_{22}}{s_2} & -\frac{s_1 a_{24}}{s_2} & a_{21} & \frac{s_3 a_{23}}{s_2} \\ -\frac{a_{23}}{s_3} & -\frac{s_1 a_{22}}{s_3} & \frac{s_2 a_{24}}{s_3} & a_{21} \end{bmatrix},$$

$$a_{21} = \cosh(\lambda_2 L_2) + \cos(\lambda_2 L_2),$$

$$a_{22} = \cosh(\lambda_2 L_2) - \cos(\lambda_2 L_2),$$

$$a_{23} = \sinh(\lambda_2 L_2) + \sin(\lambda_2 L_2),$$

$$a_{24} = \sinh(\lambda_2 L_2) - \sin(\lambda_2 L_2),$$

$$s_1 = \frac{1}{\lambda_2}, s_2 = \frac{4}{\lambda_2^2 \bar{E}_p \bar{r}_0^4}, s_3 = \frac{4}{\lambda_2^3 \bar{E}_p \bar{r}_0^4}.$$

考虑埋入部分桩基桩顶与外露部分桩基桩底的连续性条件, 可得到整体坐标系中部分埋入桩桩顶与桩底位移、转角、剪力和弯矩的关系为

$$\begin{bmatrix} U_p(L) \\ \theta_p(L) \\ Q_p(L) \\ M_p(L) \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} U_p(0) \\ \theta_p(0) \\ Q_p(0) \\ M_p(0) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_p(0) \\ \theta_p(0) \\ Q_p(0) \\ M_p(0) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中,

$$L = (l_1 + l_2) / l_1,$$

$$[T] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix}$$

设部分埋入桩桩底固定,当桩顶约束转角,产生单位水平位移时所需的剪力即为部分埋入桩桩顶水平动力阻抗,由此可得

$$\begin{bmatrix} U_p(L) \\ 0 \\ Q_p(L) \\ M_p(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_p(0) \\ M_p(0) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

则 FDV 土体中部分埋入单桩桩顶水平动力阻抗为

$$R = \frac{Q_p(L)}{U_p(L)} = \frac{T_{34}T_{23} - T_{24}T_{33}}{T_{14}T_{23} - T_{13}T_{24}}. \quad (23)$$

定义 FDV 土体中部分埋入单桩桩顶水平动刚度为 K

$$= \text{Real}(R), \text{ 等效阻尼为 } C = \text{Imag}(R) / \bar{\omega}.$$

3 数值算例与分析

这里主要借助数值算例分析 FDV 土体中部分埋入单桩桩顶的水平动力阻抗,相关无量纲参量取值为: $\bar{E}_p = 1000, \alpha = 0.5, \bar{r}_0 = 1/20, \nu = 0.35, \bar{\rho}_p = 2.5, T_\sigma = 5, T_\varepsilon = 8$. 图 2 - 图 4 给出了分数导数的阶数、外露部分桩长和本构模型参数对 FDV 土体中部分埋入单桩桩顶的水平动力阻抗的影响曲线. 对于部分埋入桩,分数导数的阶数 α 对桩顶水平动刚度有一定的影响,且分数导数的阶数越大,水平动刚度越接近经典黏弹性模型的情况,而分数导数的阶数几乎对等效阻尼没有影响. 外露部分桩长对桩顶水平动力阻抗的影响见图 3. 外露部分桩长越短,也就是埋入部分桩长越长,桩顶的水平动力阻抗越大. 这里由于埋入部分桩长越长,桩周土体对桩身的约束作用越大;同时可以看出,埋入部分桩长增大越大,也就是外露部分桩长越短,其对桩顶水平动力阻抗的影响越小. 对于土体本构模型参数,当 T_σ 越大,桩周土体对桩身的剪力越大,桩顶的水平动刚度越大;土体本构模型参数对等效阻尼绝对值的大小影响不大,但对其方向性有影响,当 $T_\sigma / T_\varepsilon < 1$ 时等效阻尼为正值,而当 $T_\sigma / T_\varepsilon > 1$ 时等效阻尼为负值.

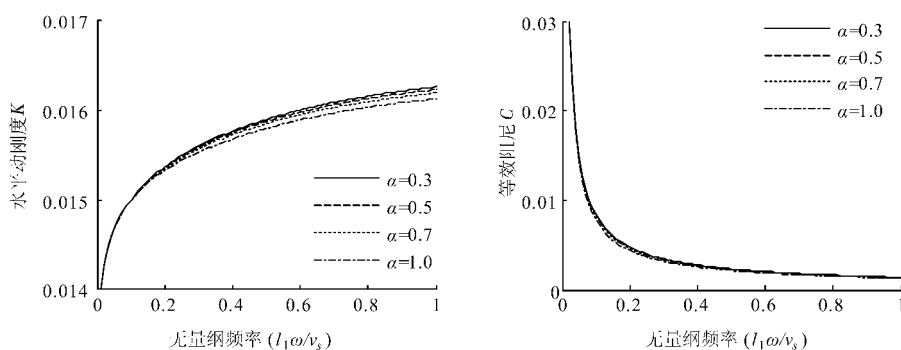


图 2 分数导数的阶数 (α) 对水平动力阻抗的影响

Fig. 2 Influence of the order of fractional derivative on horizontal dynamic impedance

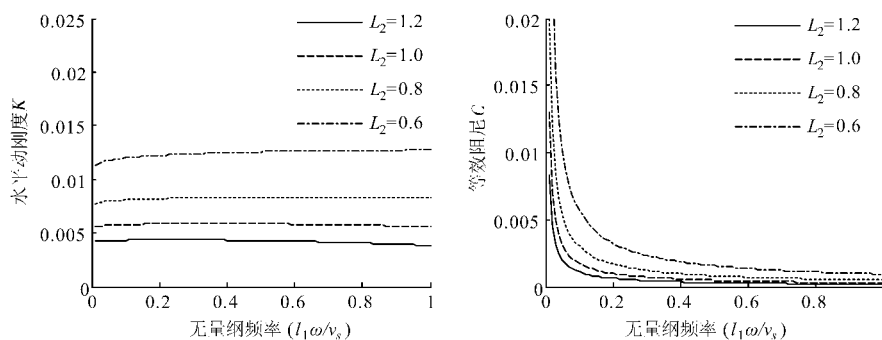


图 3 外露部分桩长 (L_2) 对水平动力阻抗的影响

Fig. 3 Influence of the length of the exposed part pile on horizontal dynamic impedance

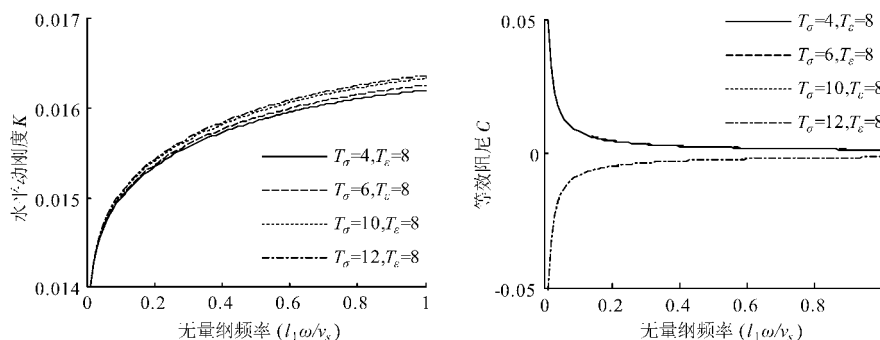
图 4 本构模型参数 (T_{σ} , T_{ε}) 对水平动力阻抗的影响

Fig. 4 Influence of the model parameters on horizontal dynamic impedanc

4 结语

本文利用分数导数黏弹性 (FDV) 模型对桩周土体的应力应变关系进行了刻画,对于桩土间的相互作用运用 Winkler 弹簧阻尼器模型进行描述,研究了基于 FDV 模型的土体中部分埋入单桩的水平动力阻抗.并以算例的形式讨

论了分数导数的阶数、外露部分桩长和土体本构模型参数对部分埋入桩桩顶水平动力阻抗的影响,由于外露部分桩长(外露部分桩长和埋入部分桩长之比)对基于 FDV 模型的土体中部分埋入单桩的水平动力阻抗有较大的影响,在设计中需要合理确定外露部分桩长和埋入部分桩长.

参考文献:

- [1] Novak M, Howell J F. *Dynamic response of pile foundation in torsion vibration* [J]. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 1977, 103 (2): 271-285.
- [2] Nogami T, Konagai K. *Time domain axial response of dynamically loaded single piles* [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1986, 12(11): 1241-1252.
- [3] 闫启方, 陈哲, 高洪波. 波浪作用下无限深海床中无限长桩横向稳态响应分析 [J]. *信阳师范学院学报:自然科学版* 2008, 21(2): 193-196.
- [4] Novak M. *Dynamic stiffness and damping of piles* [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1974, 11: 574-598.
- [5] 胡昌斌, 黄晓明. 成层粘弹性土中桩土耦合纵向振动时域响应研究 [J]. *地震工程与工程振动* 2006, 26(4): 205-211.
- [6] 周绪红, 蒋建国, 邵银生. 粘弹性介质中考虑轴力作用时桩的动力分析 [J]. *土木工程学报* 2005, 38(2): 87-91, 96.
- [7] 刘林超, 杨晓. 分数导数模型描述的饱和土桩纵向振动分析 [J]. *岩土力学* 2011, 32(2): 526-532.
- [8] 骆文和. 分数导数粘弹性土层中单桩扭转振动的研究 [J]. *中南林业科技大学学报* 2010, 30(10): 88-93.
- [9] 姚庆利, 高洪波, 闫启方. 三种黏弹性本构模型描述的土中单桩的扭转振动 [J]. *信阳师范学院学报:自然科学版* 2013, 26(3): 351-356.
- [10] 刘林超, 闫启方. 分数导数模型描述的粘弹性土层中桩基水平振动研究 [J]. *工程力学* 2011, 28(12): 139-145.
- [11] Miller K S, Ross B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations* [M]. New York: Wiley, 1993.

责任编辑:郭红建

(上接第 592 页)

- [7] Ma X P, Li R X, Lu Z D, et al. *Mining constraints in role-based access control* [J]. *Mathematical and Computer Modelling* 2012, 55(1): 87-96.
- [8] Kumar R, Sural S, Gupta A. *Mining RBAC roles under cardinality constraint* [C] // *Proceedings of the 6th International Conference on Information Systems Security*. Gandhinagar: Information Systems Security Press, 2010: 171-185.
- [9] Vaidya J, Atluri V, Warner J. *RoleMiner: mining roles using subset enumeration* [C] // *Proceedings of the 13th ACM Conference on Computer and Communications Security*. Alexandria: ACM Press, 2006: 144-153.
- [10] Ene A, Horne W, Milosavljevic N, et al. *Fast exact and heuristic methods for role minimization problems* [C] // *Proceedings of the 13th ACM Symposium on Access Control Models and Technologies*. Estes Park: ACM Press, 2008: 1-10.
- [11] Li R X, Li H Q, Wang W, et al. *Rminer: a tool set for role mining* [C] // *Proceedings of the 18th ACM Symposium on Access Control Models and Technologies*. Amsterdam: ACM Press, 2013: 193-196.

责任编辑:郭红建