信阳师范学院学报:自然科学版
第27卷 第4期 2014年10月
Journal of Xinyang Normal University
Natural Science Edition Vol. 27 No. 4 Oct. 2014

DOI:10.3969/j.issn.1003-0972.2014.04.003

一类具有时滞和非线性传染率的SEIRS模型研究

杨金根*，任 磊，苏春华

(信阳师范学院 数学与信息科学学院，河南 信阳464000)

摘 要:根据流行病的传播规律，建立了一类具有时滞和非线性发生率的SEIRS流行病脉冲微分系统，证明了系统无病周期解的存在性和全局吸引性，并进一步给出了系统持续生存的条件.

关键词:时滞; 全局吸引; 脉冲微分系统;持续性

中图分类号:O175.2 文献标志码:A 文章编号:1003-0972(2014)04-0478-05

Studies on a SEIRS Epidemic Model with Time Delays and Nonlinear Incidence Rate

Yang Jingen*，Ren Lei，Shu Chunhua

(College of Mathematics and Information Science，Xinyang Normal University，Xinyang 464000，China)

Abstract: According to the propagation of the epidemic，a SEIRS epidemic system with time delays and nonlinear incidence rate was established. The existence and global attractivity of the infection-free periodic solution were proved. In the end，the sufficient conditions for which the system is persist were obtained.

Key words: time delay; global attractive; impulsive differential system; permanence

0 引言

传染病的危害性是众所周知的，因此，对传染病的数学模型的研究在世界各国越来越受到人们的重视. 经典的传染病模型已有大量的研究结果. 文献[1-3]运用许多数学模型分析了地方病平衡点的稳定性;文献[4]对具非线性传染率和潜伏期不具传染性的模型进行了讨论.

脉冲接种是预防控制传染疾病的一种有效途径，而且脉冲接种的手段已被成功地运用于控制流行病. 脉冲接种是间隔重复性的对所有年龄段的人群进行疫苗接种，文献[5-7]等已经讨论了脉冲接种的理论与实践应用的优越性.

标准发生率和双线性发生率的确是对疾病传播比较好的描述. 但是，由于易感人群的数量比较大，易感的人和已具有传染力的病人接触时间有限，所以双线性发生率就不太合理. 蒋钰等[8]考虑了非线性发生率$\beta S^p I(p>0)$. 本文考虑了更一般的发生率，并考虑了疾病的潜伏期和脉冲接种对疾病发展的影响.

1 模型

首先给出流行病疾病发展过程的模型:

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&\dot{S}(t)=A-\beta U(S(t))I(t)-\mu S(t)+\alpha R(t),\\&\dot{E}(t)=-\beta e^{-\mu\omega}U(S(t-\omega))I(t-\omega)-\mu E+\beta U(S(t))I(t),\\&\dot{I}(t)=\beta e^{-\mu\omega}U(S(t-\omega))I(t-\omega)-(\mu+d+r)I(t),\\&\dot{R}(t)=rI(t)-(\mu+\alpha)R(t),\end{aligned}\right\}t\neq nT,\\\left.\begin{aligned}&S(t^+)=(1-p)S(t),\\&E(t^+)=E(t),\\&I(t^+)=I(t),\\&R(t^+)-R(t)=pS(t),\end{aligned}\right\}t=nT,n\in\mathbf{N}_+,\end{cases}\tag{1}$$

初始条件为$(\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau),\varphi_3(\tau),\varphi_4(\tau))\in C_+=\{[-\omega,0],\mathbf{R}^4_+\},\varphi_i(\tau)>0,i=1,2,3,4.$

系统(1)所有参数都是正常数且基于下面的假设:

1) $N(t)$表示总人口，人群被划分为4类，分别是易感类$S(t)$、潜伏类$E(t)$、感染类$I(t)$和康复类$R(t)$;

2) μ表示自然死亡率，d表示因病死亡率. 假定进入易感群体的人数为常数A(包括新生儿和新迁入的易感群体);

收稿日期:2013-11-21;修订日期:2014-04-22;*. 通信联系人，E-mail:yangjg1221@163.com

基金项目:河南省基础与前沿技术研究计划项目(132300410329，112300410244);信阳师范学院青年基金项目(2013-QN-058)

作者简介:杨金根(1979-)，男，河南南阳人，讲师，硕士，主要从事生物数学研究.

3) β 表示疾病的传染率. 本模型主要考虑非线性发生率 $\beta U(S)I$,其中 $U(S)$ 是染病者对易感者的功能性作用函数,$\beta U(S)$ 是一个染病者所具有的传染力,满足

$$U(0)=0,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}S}>0,\lim_{S\to\infty}U(S)=1;$$

4) 潜伏类个体在潜伏类群体的时间为 ω,当 $t<\omega$ 时,它们在潜伏类,当 $t>\omega$ 时,它们不在潜伏类;

5) 假定接种周期为 T,每一次的接种率为 $p(0<p<1)$.

将系统(1)中方程相加,可以得到关于总人口 $N(t)$ 的方程

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=A-\mu N(t)-dI(t).$$

由此可见总人口 $N(t)$ 不是一个常数,它将随时间变化而变化. 由上式可得

$$\frac{A}{\mu+d}\leqslant\liminf_{t\to\infty}N(t)\leqslant\limsup_{t\to\infty}N(t)\leqslant\frac{A}{\mu}.$$

由于 $E(t)=N(t)-S(t)-I(t)-R(t)$,从而系统(1)可改写为

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&\dot{S}(t)=A-\beta U(S(t))I(t)-\\&\qquad\mu S(t)+\alpha R(t),\\&\dot{I}(t)=\beta\mathrm{e}^{-\mu\omega}U(S(t-\omega))I(t-\omega)-\\&\qquad\mu+d+r)I(t),\\&\dot{R}(t)=rI(t)-(\mu+\alpha)R(t),\\&\dot{N}(t)=A-\mu N(t)-dI(t),\end{aligned}\right\}t\neq nT,\\\left.\begin{aligned}&S(t^+)=(1-p)S(t),\\&I(t^+)=I(t),\\&R(t^+)-R(t)=pS(t),\\&N(t^+)=N(t),\end{aligned}\right\}t=nT,n\in\mathbf{N}_+.\end{cases}\tag{2}$$

根据生物学的意义,我们仅在系统(2)有意义的区域:$\Omega=\{(S,I,R,N)\in\mathbf{R}_+^4|0\leqslant S+I+R\leqslant\frac{A}{\mu},N(t)\leqslant\frac{A}{\mu}\}$ 中讨论以上系统.

引理 1 考虑脉冲微分方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=a-bu,t\neq nT,0<t<\infty,\\u(t)=(1-p)u(t^-),t=nT,\end{cases}\tag{3}$$

如果 $a,b>0;0<p<1$,则(3)存在唯一的全局渐近稳定的正周期解

$$u_e=\frac{a}{b}+\left(u^*-\frac{a}{b}\right)\mathrm{e}^{-b(t-nT)},nT<t\leqslant(n+1)T,$$

其中 $u^*=\frac{a}{b}\frac{(1-p)(1-\mathrm{e}^{-bT})}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-bT}}$.

引理 2[6] 考虑线性时滞方程

$$\dot{x}(t)=a_1x(t-\omega)-a_2x(t),$$

这里:$a_1,a_2,\omega>0;x(t)>0;-\omega\leqslant t\leqslant0$,则

(i) 如果 $a_1<a_2$,那么 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$;

(ii) 如果 $a_1>a_2$,那么 $\lim_{t\to\infty}x(t)=\infty$.

引理 3[7] 考虑脉冲微分不等式

$$w'(t)\leqslant(\geqslant)p(t)w(t)+g(t),t\neq t_k,$$
$$w(t_k^+)\leqslant(\geqslant)d_kw(t_k)+b_k,t=t_k,k\in\mathbf{N},$$

这里:$p(t),g(t)\in C[\mathbf{R}_+,\mathbf{R}]$,$d_k\geqslant0$,$b_k$ 是常数. 假定

(A_0) 序列 t_k 满足 $0\leqslant t_0<t_1<t_2<\cdots$,且 $\lim_{t\to\infty}t_k=\infty$;

(A_1) $w\in PC'[\mathbf{R}_+,\mathbf{R}]$,$w(t)$ 在 t_k 左连续,$k\in\mathbf{N}$,那么

$$w(t)\leqslant(\geqslant)w(t_0)\prod_{t_0<t_k<t}d_k\exp\left(\int_{t_0}^{t}p(s)\mathrm{d}s\right)+$$
$$\sum_{t_0<t_k<t}\left(\prod_{t_k<t_j<t}d_j\exp\left(\int_{t_k}^{t}p(s)\mathrm{d}s\right)b_k\right)+$$
$$\int_{t_{k}s}^{t}\prod_{<t_k<t}d_k\exp\left(\int_{s}^{t}p(\theta)\mathrm{d}\theta\right)g(s)\mathrm{d}s,t\geqslant t_0.$$

2 无病周期解的存在性和全局吸引性

本节首先讨论系统(2)无病周期解的存在性. 由于此时对所有的 $t>0$,$I(t)=0$,因此系统(2)可化为以下较为简单的系统

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&\dot{S}(t)=A-\mu S(t)+\alpha R(t),\\&\dot{R}(t)=-(\mu+\alpha)R(t),\\&\dot{N}(t)=A-\mu N(t),\end{aligned}\right\}t\neq nT,n\in\mathbf{N}_+,\\\left.\begin{aligned}&S(t^+)=(1-p)S(t),\\&R(t^+)-R(t)=pS(t),\\&N(t^+)=N(t),\end{aligned}\right\}t=nT,n\in\mathbf{N}_+.\end{cases}\tag{4}$$

由系统(4)的第三和第六个方程,我们有 $\lim_{t\to\infty}N(t)=\frac{A}{\mu}$,并且由于 $I(t)\equiv0$,则有 $\lim_{t\to\infty}N(t)=0$. 因此我们可得到系统(4)的极限系统

$$R(t)=\frac{A}{\mu}-S(t),\tag{5}$$

和

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=(\alpha+\mu)\left(\frac{A}{\mu}-S(t)\right),t\neq nT,n\in\mathbf{N}_+,\\S(t^+)=(1-p)S(t),t=nT,n\in\mathbf{N}_+.\end{cases}\tag{6}$$

依照引理 1,我们得到系统(6)的无病周期解

$$\tilde{S}_e(t)=\frac{A}{\mu}+\left(S^*-\frac{A}{\mu}\right)\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)(t-nT)},$$
$$nT\leqslant t<(n+1)T,\tag{7}$$

并且它是全局渐近稳定的,这里

$$S^*=\frac{A}{\mu}\frac{(1-p)(1-\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)T})}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)T}}.$$

结合上面的分析,我们得到

定理 1 系统(2)存在唯一的无病周期解 $E_0=(\tilde{S}_e(t),0,\frac{A}{\mu}-\tilde{S}_e(t),\frac{A}{\mu})$.

定义

$$\mathrm{R}_1=\frac{\beta\mathrm{e}^{-\mu\omega}U(\theta)}{(\mu+d+r)},$$

其中 $\theta=\frac{A}{\mu}\left(1-\frac{p}{\mathrm{e}^{(\mu+\alpha)T}-1+p}\right)$,我们可以得到

定理 2　当 $\mathrm{R}_1 < 1$ 时,系统(2)的无病周期解 E_0 是全局吸引的.

证明　由于 $\mathrm{R}_1 < 1$,所以可选择足够小的 $\varepsilon > 0$,使得

$$\beta e^{-\mu\omega} U(\theta + \varepsilon) < (\mu + d + r). \tag{8}$$

由系统(2)的第一个和第五个方程得

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} \leqslant -(\mu + \alpha) S(t) + \dfrac{A(\mu + \alpha)}{\mu}, t \neq nT, \\ S(t^+) = (1 - p) S(t), t = nT, n \in \mathbf{N}_+. \end{cases} \tag{9}$$

运用引理 2,我们有

$$S(t) \leqslant S(n_1 T^+) \prod_{n_1 T < nT < t} (1 - p) \exp \int_{n_1 T}^{t} (-(\mu + \alpha)) ds + \int_{n_1 T}^{t} \frac{A(\mu + \alpha)}{\mu} \prod_{s < nT < t} (1 - p) \exp \int_{s}^{t} (-(\mu + \alpha)) d\theta ds = A_1 + A_2,$$

这里

$$A_1 = S(n_1 T^+) \prod_{n_1 T < nT < t} (1 - p) \exp \int_{n_1 T}^{t} (-(\mu + \alpha)) ds = S(n_1 T^+) (1 - p)^{[t/T]} e^{-(\mu+\alpha)(t - n_1 T)} \leqslant S(n_1 T) e^{(\mu+\alpha) n_1 T} e^{-(\mu+\alpha) t},$$

并且

$$\begin{aligned} A_2 = {} & \frac{A}{\mu} e^{-(\mu+\alpha)t} \int_{n_1 T}^{t} \prod_{s < nT < t} (1 - p) e^{(\mu+\alpha)s} d(\mu + \alpha) s = \\ & \frac{A}{\mu} e^{-(\mu+\alpha)t} \Big(\int_{n_1}^{n_1 + 1} \prod_{\xi < n < t/T} (1 - p) \times \\ & e^{(\mu+\alpha)T\xi} d(\mu + \alpha) T\xi + \\ & \int_{n_1 + 1}^{n_1 + 2} \prod_{\xi < n < t/T} (1 - p) e^{(\mu+\alpha)T\xi} d(\mu + \alpha) T\xi + \cdots + \\ & \int_{[t/T]}^{t/T} \prod_{\xi < n < t/T} (1 - p) e^{(\mu+\alpha)T\xi} d(\mu + \alpha) T\xi \Big) = \\ & \frac{A}{\mu} e^{-(\mu+\alpha)t} \Big((1 - p)^{[t/T] - n_1} (e^{(\mu+\alpha)T} - 1) e^{n_1(\mu+\alpha)T} + \\ & (1 - p)^{[t/T] - n_1 - 1} (e^{(\mu+\alpha)T} - 1) e^{(n_1 + 1)(\mu+\alpha)T} + \cdots + \\ & (1 - p)(e^{(\mu+\alpha)T} - 1) e^{([t/T] - 1)(\mu+\alpha)T} + \\ & e^{(\mu+\alpha)t} - e^{(\mu+\alpha)T[t/T]} \Big) \leqslant \\ & \frac{A}{\mu} \Big(1 - \frac{p e^{(\mu+\alpha)T([t/T] + 1 - t/T)}}{e^{(\mu+\alpha)T} - 1 + p} \Big). \end{aligned}$$

所以我们有

$$S(t) \leqslant S(n_1 T) e^{(\mu+\alpha)(n_1 T)} e^{-(\mu+\alpha)t} + \frac{A}{\mu} \Big(1 - \frac{p}{e^{(\mu+\alpha)T} - 1 + p} \Big),$$

由此可得

$$\limsup_{t \to \infty} S(t) \leqslant \frac{A}{\mu} \Big(1 - \frac{p}{e^{(\mu+\alpha)T} - 1 + p} \Big),$$

即存在一个正整数 $n_2 \geqslant n_1$ 和任意小的正常数 ε,使得对于所有的 $t \geqslant n_2 T$,都有

$$S(t) \leqslant \frac{A}{\mu} \Big(1 - \frac{p}{e^{(\mu+\alpha)T} - 1 + p} \Big) + \varepsilon \doteq \eta. \tag{10}$$

由系统(2)的第二个方程和(10),我们有

$$\frac{dI(t)}{dt} \leqslant \beta U(\eta) e^{-\mu\omega} I(t - \omega) - (\mu + d + r) I(t). \tag{11}$$

我们来考虑下面的微分系统

$$\dot{z}(t) = \beta U(\eta) e^{-\mu\omega} z(t - \omega) - (\mu + d + r) z(t). \tag{12}$$

由不等式(8)我们有 $\beta U(\eta) e^{-\mu\omega} < (\mu + d + r)$,依据引理 2 有

$$\lim_{t \to \infty} z(t) = 0,$$

因为对于所有的 $s \in [-\theta, 0]$,$I(s) = z(s) > 0$,由微分方程比较定理和 $I(t) \geqslant 0$ 得

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = 0. \tag{13}$$

由此,对足够小的 $\varepsilon_1 > 0$,存在 $n_3 > n_2$(这里 $n_3 T > n_2 T + \omega$),使得 $t > n_3 T$ 时 $I(t) < \varepsilon_1$. 由系统(2)的第四个方程得

$$\dot{N}(t) \geqslant A - \mu N(t) - d\varepsilon_1.$$

考虑方程

$$\dot{m}(t) = A - \mu m(t) - d\varepsilon_1,$$

得 $\lim_{t \to \infty} m(t) = \dfrac{A - \alpha\varepsilon_1}{\mu}$. 按照比较定理,存在 $n_4 > n_3$(这里 $n_4 T > n_3 T + \omega$),使得 $t > n_4 T$ 时,$N(t) > \dfrac{A - d\varepsilon_1}{\mu} - \varepsilon$. 由于 ε_1 任意小,考虑到 $\limsup_{t \to \infty} N(t) = \dfrac{A}{\mu}$,所以

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = \frac{A}{\mu}, \tag{14}$$

从而由(13)和(14)得,存在 $n_5 > n_4$ 使得 $t > k_5 T$ 时

$$I(t) < \varepsilon_1, N(t) > \frac{A}{\mu} - \varepsilon_1. \tag{15}$$

因此,由系统(1)的第二个方程知

$$\dot{E}(t) \leqslant \beta U\Big(\frac{A}{\mu}\Big) \varepsilon_1 - \mu E(t),$$

利用比较定理易得,存在 $n_6 > n_5$(这里 $n_6 T > n_5 T + \omega$),使得 $t > k_6 T$ 时

$$E(t) \leqslant \frac{\beta U\big(\frac{A}{\mu}\big) \varepsilon_1}{\mu} + \varepsilon_1.$$

由 ε_1 的任意性和比较定理得

$$\lim_{t \to \infty} E(t) = 0, \tag{16}$$

即存在 $n_7 > n_6$,使得

$$E(t) \leqslant \varepsilon_1, t > n_7 T. \tag{17}$$

因此,由系统(1)的第一个方程及(14)、(16)得,当 $t > n_7 T$ 时,有

$$S(t) \geqslant \Big(\frac{A}{\mu}(\mu + \alpha) - \beta U\Big(\frac{A}{\mu}\Big) \varepsilon_1 - 3\alpha\varepsilon_1 \Big) - (\mu + \alpha) S(t),$$

和

$$S(t) \leqslant (\mu + \alpha) \Big(\frac{A}{\mu} - S(t) \Big).$$

考虑微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \Big(\dfrac{A}{\mu}(\mu + \alpha) - \beta U\Big(\dfrac{A}{\mu}\Big) \varepsilon_1 - 3\alpha\varepsilon_1 \Big) - (\mu + \alpha) u(t), t \neq nT, t > n_7 T, \\ u(t^+) = (1 - p) u(t), t = nT, t > n_7 T, \end{cases} \tag{18}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(\mu+\alpha)\left(\dfrac{A}{\mu}-v(t)\right),t\neq nT,t>n_7T,\\ v(t^+)=(1-p)v(t),t=nT,t>n_7T,\end{cases}\tag{19}$$

由引理1得上述两个系统周期解分别为

$$\tilde{u}(t)=\frac{B}{\mu+\alpha}+\left(u^*-\frac{B}{\mu+\alpha}\right)\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)(t-nT)},$$

和

$$\tilde{v}_e(t)=\frac{A}{\mu}+\left(v^*-\frac{A}{\mu}\right)\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)(t-nT)},$$

$nT\leqslant t<(n+1)T$，这里

$$u^*=\frac{B}{\mu+\alpha}\frac{(1-p)(1-\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)T})}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)T}},$$

$$B=\frac{A}{\mu}(\mu+\alpha)-\beta U\left(\frac{A}{\mu}\right)\varepsilon_1-3\alpha\varepsilon_1,$$

$$v^*=\frac{A}{\mu}\frac{(1-p)(1-\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)T})}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)T}}.$$

由脉冲微分方程比较定理得，存在 $n_8>n_7$ 使得当 $t>n_7T$ 时 $\tilde{v}(t)+\varepsilon_1\geqslant S(t)\geqslant\tilde{u}(t)-\varepsilon_1$. 设 $\varepsilon_1\to0$，从而 $\tilde{S}(t)+\varepsilon_1\geqslant S(t)\geqslant\tilde{S}(t)-\varepsilon_1$. 当 $t\to\infty$时，$S(t)\to\tilde{S}(t)$，即

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\tilde{S}(t).\tag{20}$$

由于 $R(t)=N(t)-S(t)-E(t)-I(t)$，则由(13)、(14)、(16)、(20)可得

$$\lim_{t\to\infty}R(t)=\frac{A}{\mu}-\tilde{S}(t).\tag{21}$$

因此，当 $\mathrm{R}_1<1$ 时，系统(3)的无病周期解 E_0 全局吸引. 证毕.

由定理2，我们很容易得到下面的结论：

推论1　在系统(2)中，记 $\gamma=\mu+d+r$，则有

(i) 若 $\beta\mathrm{e}^{-\mu\omega}U(A/\mu)<\gamma$，那么系统(3)的无病周期解 E_0 是全局吸引的；

(ii) 若 $\beta\mathrm{e}^{-\mu\omega}U(A/\mu)>\gamma$，且 $T<T^*$，那么系统(3)的无病周期解 E_0 全局吸引，其中

$$T^*=\frac{1}{\mu+\alpha}\ln\left(1-p+\frac{p}{1-U^{-1}\left(\frac{\gamma\mathrm{e}^{\mu\omega}}{\beta}\right)\frac{\mu}{A}}\right).$$

推论2　当 $p>p^*$ 时，系统(3)的无病周期解 E_0 是全局吸引的，其中

$$p^*=\frac{\frac{A}{\mu}-U^{-1}\left(\frac{\gamma\mathrm{e}^{\mu\omega}}{\beta}\right)}{U^{-1}\left(\frac{\gamma\mathrm{e}^{\mu\omega}}{\beta}\right)(\mathrm{e}^{(\mu+\alpha)T}-1)}.$$

3　系统持续性

定义1　称系统(2)是一致持续的，如果存在正常数 $\zeta>0$，使得系统(2)满足初始条件的每一解 $(S(t),I(t),R(t),N(t))$ 均满足

$$\liminf_{t\to\infty}S(t)>\zeta,\liminf_{t\to\infty}I(t)>\zeta,$$
$$\liminf_{t\to\infty}R(t)>\zeta,\liminf_{t\to\infty}N(t)>\zeta.$$

定义

$$\mathrm{R}_2=\frac{A\beta\mathrm{e}^{-\mu\omega}(1-p)(1-\mathrm{e}^{-\mu T})}{\mu\gamma(1-(1-p)\mathrm{e}^{-\mu T})},$$

$$I^*=\frac{A\mathrm{e}^{-\mu\omega}(1-p)(1-\mathrm{e}^{-\mu T})}{\gamma(1-(1-p)\mathrm{e}^{-\mu T})}-\frac{\mu}{\beta}.$$

显然，若 $\mathrm{R}_2>1$，则必有 $I^*>0$.

定理3　若 $\mathrm{R}_2>1$，那么一定存在正数 $q>0$，使得 t 充分大时，系统(2)每一正解 $(S(t),I(t),R(t),N(t))$ 均满足 $I(t)>q$.

证明　系统(2)的第二个方程可改写为

$$\dot{I}(t)=I(t)(\beta\mathrm{e}^{-\mu\omega}U(S(t))-\gamma)-\beta\mathrm{e}^{-\mu\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t-\omega}^{t}U(S(\tau))I(\tau)\mathrm{d}\tau.\tag{22}$$

定义 $V(t)=I(t)+\beta\mathrm{e}^{-\mu\omega}\int_{t-\omega}^{t}U(S(\tau))I(\tau)\mathrm{d}\tau$，那么

$$\dot{V}(t)=I(t)\gamma\left(\frac{\beta\mathrm{e}^{-\mu\omega}}{\gamma}U(S(t))-1\right).\tag{23}$$

由于 $\mathrm{R}_2>0$，所以对充分小的 $\varepsilon>0$，有

$$\frac{\beta\mathrm{e}^{-\mu\omega}}{\gamma}\left(\frac{A-\beta U(\theta)I^*}{\mu}\frac{(1-p)(1-\mathrm{e}^{-\mu T})}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-\mu T}}-\varepsilon\right)>1.\tag{24}$$

我们要证明：对任意的 $t_0>0$，$t>t_0$ 时，$I(t)<I^*$ 不可能总成立.

实际上，若 $t>t_0$ 时，$I(t)<I^*$ 总成立，则由系统(2)的第二个方程得

$$S(t)\geqslant A-\beta U(\theta)I^*-\mu S(t),$$

其中 $\theta=\frac{A}{\mu}\left(1-\frac{p}{\mathrm{e}^{(\mu+\alpha)T}-1+p}\right)$. 考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A-\beta U(\theta)I^*-\mu x(t),t\neq nT,\\ x(t^+)=(1-p)v(t),t=nT.\end{cases}\tag{25}$$

由引理1得

$$\tilde{x}_e(t)=\frac{A-\beta U(\theta)I^*}{\mu}+\left(x^*-\frac{A-\beta U(\theta)I^*}{\mu}\right)\mathrm{e}^{-\mu(t-nT)},$$

$nT\leqslant t<(n+1)T$，并且它是全局渐近稳定的，这里

$$x^*=\frac{A-\beta U(\theta)I^*}{\mu}\frac{(1-p)(1-\mathrm{e}^{-\mu T})}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-\mu T}}.$$

因此存在 $t_1(>t_0)$，使得当 $t>t_1$ 时，

$$S(t)>\tilde{x}_e(t)-\varepsilon>x^*-\varepsilon,\tag{26}$$

故由不等式(24)有$\frac{\beta\mathrm{e}^{\mu\omega}}{\gamma}\sigma>1$，由方程(23)和不等式(26)得

$$\dot{V}(t)>I(t)\gamma\left(\frac{\beta\mathrm{e}^{-\mu\omega}}{\gamma}U(\sigma)-1\right),t>t_1.\tag{27}$$

令 $I_l=\min_{t\in[t_1,t_1+\omega]}I(t)$，则对所有的 $t\geqslant t_1$，必有 $I(t)\geqslant I_l$，如若不然，必存在 $\tau_0\geqslant0$，使得 $t_1<t<t_1+\omega+\tau_0$ 时，$I(t)\geqslant I_l$，$I(t_1+\omega+\tau_0)=I_l$，且 $\dot{I}(t_1+\omega+\tau_0)\leqslant0$. 而由系统(2)的第二个方程和不等式(26)知

$$\dot{I}(t_1+\omega+\tau_0)\geqslant\gamma\left(\frac{\beta\mathrm{e}^{-\mu\omega}}{\gamma}U(S(t_1+T_0))-1\right)I_l>$$
$$\gamma\left(\frac{\beta\mathrm{e}^{-\mu\omega}}{\gamma}U(\sigma)-1\right)I_l>0,$$

矛盾. 所以对所有的 $t\geqslant t_1$，必有 $I(t)\geqslant I_l$. 因此当 $t\geqslant t_1$ 时

$$\dot{V}(t) > \gamma(\frac{\beta e^{-\mu\omega}}{\gamma}U(\sigma) - 1)I_l.$$

这表明 $t \to \infty$ 时，$V(t) \to \infty$，这与 $V(t) \leqslant \frac{A}{\mu}(1 + \frac{A\omega\beta e^{-\mu\omega}}{\mu})$ 矛盾. 所以 $I(t) < I^*$ 不可能总成立.

对充分大的 t，或者 $I(t) \geqslant I^*$，或者 $I(t)$ 的值围绕上下波动，我们只需讨论第二种情况.

定义

$$q = \min\{\frac{I^*}{2}, q_1\}, q_1 = I^* e^{-\gamma\omega}.$$

设 $t^* > 0, \xi > 0$ 满足 $I(t^*) = I(t^* + \xi) = I^*$，$I(t) < I^*$，$(t^* < t < T^* + \xi)$. 并且 t^* 充分大使得 $S(t) > \sigma$，$t^* < t < T^* + \xi$，由于系统(3)的正解最终一致有界，因此 $I(t)$ 一致连续且不受脉冲影响，所以存在一个不依赖 t^* 的 T_0，使 $t^* < t < t^* + T_0$ 时，$I(t) > \frac{I^*}{2}$，所以

(1) 当 $\xi \leqslant T_0$ 时，结论显然；

(2) 当 $T_0 < \xi \leqslant \omega$ 时，由于 $\dot{I}(t) > -\gamma I(t)$，$I(t^*) = I^*$，可知，当 $t^* < t < t^* + \xi$ 时，$I(t) > I^* e^{-\gamma t} \geqslant I^* e^{-\gamma\omega}$，即 $I(t) > q$；

(3) 当 $\xi > \omega$ 时，由于 $\dot{I}(t) > -\gamma I(t)$，$I(t^* + \xi) = I^*$，所以 $I(t) > I^*$.

由于区间 $t^* < t < t^* + \xi$ 任意性，所以对充分大的 t，$I(t) > q$ 成立. 证毕.

定理 4 若 $R_2 > 1$，则系统(2)是一致持久的.

证明 设 $(S(t), I(t), R(t), N(t))$ 是系统(2)的任一解，则由系统(2)的第二个方程有

$$\dot{S}(t) \geqslant A - (\beta U(\theta) + \mu)S(t),$$

故由引理 1 和比较定理得

$$\lim_{t\to\infty} S(t) \geqslant a, \tag{28}$$

这里

$$a = \frac{A}{\beta U(\theta) + \mu}\frac{(1-p)(1 - e^{-(\beta U(\theta)+\mu)T})}{1 - (1-p)e^{-(\beta U(\theta)+\mu)T}} - \varepsilon.$$

由系统(2)的第三个方程有

$$\dot{R}(t) \geqslant rq - (\mu + \alpha)R(t).$$

容易看出

$$\lim_{t\to\infty} R(t) \geqslant b, \tag{29}$$

这里 $b = \frac{rq}{\mu + \alpha} - \varepsilon$，取 $\zeta = \min\{q, a, b\}$，则由(28)、(29)和定理 3 可知，系统(2)是一致持久的. 证毕.

记

$$T^* = \frac{1}{-\mu}\ln(\frac{1}{1+p} - \frac{pA\beta e^{-\mu\omega}}{(1-p)(A\beta e^{-\mu\omega} - \mu\gamma)}),$$

$$p_* = \frac{(A\beta e^{-\mu\omega} - \mu\gamma)(1 - e^{-\mu T})}{A\beta e^{-\mu\omega}(1 - e^{-\mu T}) + \mu\gamma e^{-\mu T}}.$$

由定理 4，容易得到下面的结果：

推论 3 如果 $T > T^*$，那么系统(2)是一致持久的.

推论 4 如果 $p < p_*$，那么系统(2)是一致持久的.

4 结论

文章讨论了一类具有时滞和非线性发生率的流行病模型. 证明了系统无病周期解的存在性和全局吸引性，给出了系统持续生存的条件. 结论表明，如果接种周期比较小或预防接种比例比较大或疾病潜伏周期比较长，那么系统无病周期解是全局吸引的，疾病将灭绝；如果脉冲接种的周期太长或接种的比例太小，疾病将会蔓延成为一种地方病.

参考文献：

[1] Li J Q, Ma Z E, Zhou Y C, et al. *Global analysis of SIS epidemic model with a simple vaccination and multiple endemic equilibria* [J]. Acta Mathematica Scientia, 2006, 26B(1): 83-93.

[2] Li M Y, Smith H L, Wang L C. *Global dynamics of an SEIR epidemic model with vertical transmission* [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2001, 62(1): 58-69.

[3] Jin Z, Ma Z E, Han M A. *Global stability of an SIRS epidemic model with delays* [J]. Acta Mathematica Scientia, 2006, 26(2): 291-306.

[4] 杨金根，张俊艺. 一类具饱和传染率和脉冲接种的传染病模型 [J]. 信阳师范学院学报：自然科学版，2013，26(4)：489-492.

[5] 柳合龙，郑丽丽. 带有脉冲免疫和脉冲隔离 SIQV 传染病模型的全局结论 [J]. 信阳师范学院学报：自然科学版，2005，18(4)：381-383，466.

[6] Ramsay M, Gay N, Miller E, et al. *The epidemiology of measles in England and Wales: rationale for the 1994 National vaccination campaign* [J]. Communicable Disease Report CDR Review, 1994, 4(12): 141-146.

[7] Shulgin B, Stone L, Agur Z. *Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model* [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1998, 60(6): 1123-1148.

[8] 蒋钰，梅立泉，宋新宇，等. 具有时滞和脉冲接种的非线性发生率的流行病模型分析 [J]. 数学物理学报，2012，32(4)：670-684.

责任编辑：郭红建