考虑二阶效应时筒中筒结构基本微分方程的有限差分解

叶文洪[1], 刘 琼[2], 彭春东[2]
(1. 信阳师范学院 建筑工程系, 河南 信阳 464000; 2. 河南省第七建筑工程公司, 河南 信阳 464000)

摘 要: 用有限差分法对考虑二阶效应时筒中筒结构的基本微分方程进行求解, 并把计算结果与一阶分析的结果进行了比较

关键词: 筒中筒结构; P‘ △效应; 基本微分方程; 有限差分法
中图分类号: TU 311.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1003-0972(2000)03-0288-04

由文献[1], 考虑二阶效应时筒中筒结构的基本微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}u^4}{\mathrm{d}\zeta^4}-[\lambda^2-a(1-\zeta)]\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}\zeta^2}-a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}=\left[-\frac{C_f}{EI_wEI_f}M(\zeta)+\frac{q(\zeta)}{EI_w}\right]H^4 \tag{1}$$

式中 $\lambda=H\sqrt{\dfrac{C_f(1+EI_w/EI_f)}{EI_w}}$ 为筒中筒结构的刚度特征值; $a=\dfrac{gH^4}{EI_w}=\dfrac{N_0H^2}{EI_w}$ 为筒中筒结构的二阶效应系数; N_0 为建筑物的总重量.

方程(1)是变系数线性微分方程, 其解不能用初等函数表示, 现用有限差分法进行求解

设建筑物的层高为 h, 共有 n 层, 则其总高度 $H=nh$. 用中心差分格式, 取层高 h 为步长若采用无量纲坐标 $\zeta=\dfrac{z}{H}$, 则第 i 层楼盖处的价值 $\zeta_i=\dfrac{z_i}{H}=\dfrac{ih}{H}=\dfrac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 可知步长为 $\dfrac{1}{n}$. 记 $u_i=u(\zeta_i)$, 则 $u(\zeta_i)$ 一至四阶的导数可表示为:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}\right)_i=u'(\zeta_i)=n(u_{i+1}-u_{i-1})/2\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\zeta^2}\right)_i=u''(\zeta_i)=n^2(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\zeta^3}\right)_i=u'''(\zeta_i)=n^3(u_{i+2}-2u_{i+1}+2u_{i-1}-u_{i-2})/2\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}\zeta^4}\right)_i=u^{(4)}(\zeta_i)=n^4(u_{i+2}-4n_{i+1}+6n_i-4n_{i-1}+u_{i-2})\end{cases} \tag{2}$$

将式(2)代入到微分方程(1), 得差分方程:

$$\begin{aligned}&2u_{i-2}-\left(8+\frac{b_i}{n^2}-\frac{a}{n^3}\right)u_{i-1}+2\left(6+\frac{b_i}{n^2}\right)u_i-\left(8+\frac{b_i}{n^2}+\frac{a}{n^3}\right)u_{i+1}+2u_{i+2}\\ &\quad=2\left[-\frac{C_f}{EI_wEI_f}M(\zeta_i)+\frac{q(\zeta_i)}{EI_w}\right]h^4\end{aligned} \tag{3}$$

式中 $b_i=2[\lambda^2-a(1-\zeta_i)]$, $i=1,2,\cdots,n$.

收稿日期: 1999-06-02
作者简介: 叶文洪(1943-), 男, 湖北黄石人, 副教授, 主要从事高层建筑结构研究.

对于三种典型荷载: 均布荷载、倒三角形荷载和顶端集中荷载, 根据四个边界条件: (1) 结构在底端位移为零; (2) 结构在底端转角为零; (3) 在顶端, 内筒的弯矩为零; (4) 在顶端, 结构的总剪力 $V = V_w + V_f$, 可求出 u_{-1}, u_0, u_{n+1}, u_{n+2} 的表达式 将它们与函数 $q(\zeta_i)$、$M(\zeta_i)$ 的表达式汇总成表 1.

表 1　$q(\zeta_i)$, $m(\zeta_i)$, u_{-1}, u_0, u_{n+1}, u_{n+2} 的表达式

	$q(\zeta_i)$	$M(\zeta_i)$	u_{-1}	u_0	u_{n+1}	u_{n+2}
均布荷载	q	$\frac{1}{2}qH^2(1-\zeta_i)^2$	u_1	0	$2u_n - u_{n-1}$	$t - \frac{n^3 C_f q h^6}{3EI_w EI_f}$
倒三角形荷载	$q\zeta_i$	$\frac{1}{2}qH^2(1-\zeta_i)^2 - \frac{1}{6}qH^2(1-\zeta_i)^3$	u_1	0	$2u_n - u_{n-1}$	$t - \frac{n^3 C_f q h^6}{4EI_w E i_f}$
顶端集中荷载	0	$PH(1-\zeta_i)$	u_1	0	$2u_n - u_{n-1}$	$t - \frac{(2EI_f + n^2 C_f h^2)Ph^3}{EI_w EI_f}$

注: $t = (2+\frac{\lambda^2}{n^2})u_{n+1} - (2+\frac{\lambda^2}{n^2})u_{n-1} + u_{n-2}$

将表 1 的结果代入到式(3), 便得到差分方程组:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & & & & & \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & & & & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & & & \\ & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & k_{n-2,n-4} & k_{n-2,n-3} & k_{n-2,n-2} & k_{n-2,n-1} & k_{n-2,n} \\ & & & & k_{n-1,n-3} & k_{n-1,n-2} & k_{n-1,n-1} & k_{n-1,n} \\ & & & & & k_{n,n-2} & k_{n,n-1} & k_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ F_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

或写成

$$[K]\{u\} = \{F\} \tag{5}$$

式中

$k_{11} = 2(7+\frac{b_1}{n^2})$, $k_{n-1,n-1} = 2(5+\frac{b_{n-1}}{n^2})$, $k_{n-1,n} = -(4+\frac{b_{n-1}}{n^2}+\frac{a}{n^3})$,

$k_{n,n-2} = 4$, $k_{n,n-1} = -2(4+2\frac{\lambda^2}{n^2}-\frac{a}{n^3})$, $k_{n,n} = 2(2+2\frac{\lambda^2}{n^2}-\frac{a}{n^3})$.

$$h_{ij}=\begin{cases}2 & i=1,2,\cdots,n-2; \quad j=i+2\\ -\left(8+\frac{b_i}{n^2}+\frac{a}{n^3}\right) & i=1,2,\cdots,n-2; \quad j=i+1\\ 2\left(6+\frac{b_i}{n^2}\right) & i=2,3,\cdots,n-2; \quad j=i\\ -\left(8+\frac{b_i}{n^2}-\frac{a}{n^3}\right) & i=2,3,\cdots,n-1; \quad j=i-1\\ 2 & i=3,4,\cdots,n-1; \quad j=i-2\\ 0 & i=1,2,\cdots,n-3; \quad j=i+3,i+4,\cdots,n\\ 0 & i=4,5,\cdots,n; \quad j=1,2,\cdots,i-3\end{cases}$$

$$b_i=2\left[\lambda^2-a\left(1-\frac{i}{n}\right)\right],\ i=1,2,\cdots,n.$$

而式(4)右边的列向量, 对于不同的水平荷载类型, 有其不同的形式, 如表 2 所示:

表 2　三种荷载的 $F_i(i=1,2,...,n)$ 表达式

	$F_i(i=1,2,\cdots,n-1)$	F_n
均布荷载	$\left[-\frac{C_f qh^2}{EI_wEI_f}(n-i)^2+\frac{2q}{EI_w}\right]h^4$	$\left[\frac{2n^3C_f qh^2}{3EI_wEI_f}+\frac{2q}{EI_w}\right]h^4$
倒三角形荷载	$\left\{-\frac{C_f qh^2}{EI_wEI_f}\left[(n-i)^2-\frac{(n-i)^3}{3n}\right]+\frac{2q}{EI_w}\frac{i}{n}\right\}h^4$	$\left[\frac{n^3C_f qh^2}{2EI_wEI_f}+\frac{2q}{EI_w}\right]h^4$
顶端集中荷载	$-\frac{2C_f(n-i)}{EI_wEI_f}Ph^5$	$\frac{2(2EI_f+n^2C_f h^2)}{EI_wEI_f}Ph^3$

求出水平位移$\{u\}$后, 就可进一步求出结构的内力, 此过程不再赘述

下面给出一个算例[2], 某筒中筒结构之平面图如图 1 所示 除底层层高为 3.9 m 外, 其余各层均为 3.6 m. 建筑物共 21 层, 总高度为 75.9 m. 外筒柱距为 2 m, 中柱截面尺寸为 45×40 cm, $I_c=0.0024\ m^4$. 角柱截面面积与惯性矩和中柱的相同 连系梁截面为 30×55 cm, $I_b=0.0041\ m^4$. 内筒惯性矩 $I_w=251.795\ m^4$, 内、外筒混凝土弹性模量 $E=3\times10^7\ kN/m^2$, $EI_w=7.5538\times10^9\ kN\cdot m^2$, 建筑物每层重量 1.17×10^4 kN, 总重量 $N_0=2.457\times10^5$ kN.

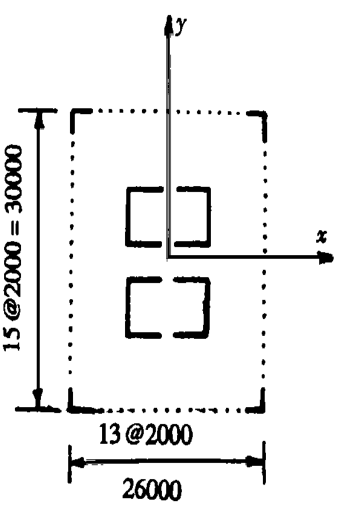

图 1

据给出的结构几何参数和材料的弹性模量, 由文献[1]中的公式, 可算出外框筒的截面惯性矩和剪切刚度分别为

$$I_f=1176.24\ m^4,\ C_f=1.12\times10^6\ kN$$

于是由式(1)可算出结构的刚度特征值 λ 及二阶效应系数 a:

$$\lambda = H\sqrt{\frac{C_f(1+EI_w/EI_f)}{EI_w}} = 1.109,\ a = \frac{N_0H^2}{EI_w} = 0.187$$

倒三角形荷载的顶端荷载集度 $q = 234.6$ kN/m. 按差分方程(4)计算出各楼层的水平位移, 其结果列于表 3. 作为比较, 表中还列出了一阶理论分析时的水平位移.

表 3　各楼层水平位移　　mm

楼层	考虑 P-△效应		一阶理论	
	楼层位移	层间位移	楼层位移	层间位移
21	73.56		72.39	
		4.60		4.51
20	68.96		67.88	
		4.58		4.52
19	64.38		63.36	
		4.59		4.53
18	59.79		58.83	
		4.60		4.52
17	55.19		54.31	
		4.58		4.51
16	50.61		49.80	
		4.58		4.50
15	46.03		45.30	
		4.53		4.45
14	41.50		40.85	
		4.47		4.40
13	37.03		36.45	
		4.38		4.31
12	32.65		32.14	
		4.27		4.20
11	28.38		27.94	
		4.13		4.06
10	24.25		23.88	
		3.94		3.89
9	20.31		19.99	
		3.73		3.66
8	16.58		16.33	
		3.46		3.41
7	13.12		12.92	
		3.16		3.12
6	9.96		9.80	
		2.83		2.77
5	7.13		7.03	
		2.42		2.39
4	4.71		4.64	
		1.97		1.94
3	2.74		2.70	
		1.48		1.46
2	1.26		1.24	
		0.93		0.91
1	0.33		0.33	

参考文献:

[1]　叶文洪. 考虑二阶效应时筒中筒结构的基本微分方程[J]. 信阳师范学院学报, 2000, 13(2): 154-158.

[2]　朱幼麟. 筒中筒结构的简化计算[J]. 建筑结构学报, 1984, (2).

The finite difference solution of fundamental differential equation on tube-in-tube structures considering second order effects

YE Wen-hong[1], LIU Qiong[2], PENG Chun-dong[2]

(1. Dept. of Architectural Engineering, Xinyang Teachers College, Xinyang 464000, China;

2. Henan Province Seventh Building Engineering Company, Xinyang 464000, China)

Abstrect: The finite difference method is used to solve the fundamental differential equation on tubo-in-tube structures considering second order effects, and the results are compared with those obtained by first order analysis.

Key words: tube-in-tube structures; P-△ effects; fundamental differential equation; finite difference method

责任编辑: 郭红建